GLEICHGEWICHTSFIGUREN ROTIERENDER FLÜSSIGKEITEN

VON

LEON LICHTENSTEIN
O. Ö. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER
UNIVERSITÄT LEIPZIG

MIT 4 ABBILDUNGEN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1933

Meiner lieben Frau

Vorwort.

Die vorliegende kleine Schrift ist aus einem Kolleg über kosmogonische Hypothesen hervorgegangen, das ich im Sommer-Semester 1928 an der hiesigen Universität hielt. In jenen Vorlesungen habe ich, von bekannten Resultaten von Poincaré und Liapounoff ausgehend, an Hand einer Folge eigener Arbeiten ein Programm weitergehender Untersuchungen entwickelt, die mit den zur Zeit verfügbaren Hilfsmitteln als durchführbar erschienen. Es handelte sich dabei um eine Reihe neuer Existenz- und Stabilitätssätze in der Theorie der Gleichgewichtsfiguren homogener und heterogener Flüssigkeiten sowie um einige Probleme der Dynamik vollkommen inkohärenter Medien, insbesondere die Maxwellsche Theorie der Ringe des Saturn. Ein erheblicher Teil des damals entworfenen Programms, vor allem was die Existenzfragen in der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten anlangt, ist seitdem durch die Arbeiten meiner Leipziger Schüler und meine eigenen Untersuchungen erledigt worden. Was auf dem zuletzt genannten Gebiete jetzt fertig vorliegt, bildet ein abgerundetes Ganzes, von dem manche Wege zu neuen Zielen führen. Dieses Ganze im Zusammenhang darzustellen, ist die Aufgabe des vorliegenden kleinen Buches. Die mit den Existenzproblemen eng zusammenhängenden Stabilitätsfragen wie auch die in der Himmelsmechanik sich darbietenden Probleme der Dynamik vollkommen inkohärenter Medien mußten zurückgestellt werden. Sollten die Umstände es gestatten, so werde ich all diesen Fragen später einmal ein weiteres Bändchen widmen.

Und nun zu dem Inhalt dieses kleinen Werkes im einzelnen. Nachdem in einem kurzen einleitenden Kapitel diejenigen Sätze der Potentialtheorie und der Hydrostatik, von denen später Gebrauch gemacht wird, zusammengestellt worden sind, werden in dem zweiten Kapitel einige allgemeine Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren rotierender gravitierender homogener oder heterogener Flüssigkeiten abgeleitet. Nach einer knappen historischen Würdigung der Ergebnisse von Liapounoff und Poincaré wird in dem dritten Kapitel ein ausführlicher Beweis des von Poincaré postulierten Satzes betreffend die Existenz neuer Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Flüssigkeiten in der Umgebung einer gegebenen homogenen Gleichgewichtsfigur entwickelt und im Anschluß daran einige Probleme des relativen Gleichgewichtes eines aus

einem starren Körper und einer Flüssigkeit bestehenden Systems behandelt. Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit nichthomogenen Gleichgewichtsfiguren. Hier wird ein zu dem Poincaréschen analoger Satz über die Existenz neuer heterogener Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft einer gegebenen homogenen oder heterogenen Gleichgewichtsfigur bewiesen. Als spezielle Resultate sind in diesen Ergebnissen ein Satz über die Existenz schwach heterogener Gleichgewichtsfiguren in der Umgebung homogener Gleichgewichtsfiguren bsp. der Maclaurinschen und Jacobischen Ellipsoide, sowie eine Begründung der Clairautschen Theorie der Figur der Erde enthalten. So viel über neue Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft bereits bekannter Gleichgewichtsfiguren. In dem zweiten Hauptkapitel der Himmelsmechanik, der Theorie der Gestalt der Himmelskörper, sind zahlreiche Konfigurationen bekannt, die in einer ersten Näherung den Gleichgewichtsbedingungen genügen, — es sei nur an die Rocheschen unendlich kleinen Satelliten oder die Poincaré-S. Kowalewskische ringförmige Gleichgewichtsfigur mit oder ohne Zentralkörper erinnert. Es war zu vermuten, daß in der Nachbarschaft dieser und ähnlicher Konfigurationen Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten gelegen seien. In dem fünften Schlußkapitel des Werkes wird in Durchführung dieses Grundgedankens die Existenz einer langen Reihe neuer Gleichgewichtsfiguren bewiesen. Neben eigenen Arbeiten, von denen an dieser Stelle als besonders aufschlußreich und mit analytischen Schwierigkeiten verbunden der Existenzbeweis einer ringförmigen Gleichgewichtsfigur ohne Zentralkörper (vgl. **22.**) sowie die Betrachtungen der Nummern **27**, **28**, **29** hervorgehoben seien, habe ich in diesem Zusammenhang eine Folge von Abhandlungen meiner Schüler, der Herren E. Kähler, V. Garten und K. Maruhn zu erwähnen, während ich den Untersuchungen meines Schülers und jüngeren Kollegen E. Hölder manchen wesentlichen Beitrag zur allgemeinen Theorie verdanke.

In dem dritten, vierten und fünften Kapitel bringe ich eine Anzahl neuer noch nicht publizierter Ergebnisse sowie neuer Fragestellungen, die nicht ohne Interesse sein dürften. Allem anderen liegen, wie vorhin erwähnt, Veröffentlichungen von mir selbst und von meinen Mitarbeitern zugrunde. Doch nur vereinzelt schließt sich die Darstellung unmittelbar an frühere Publikationen an. Fast durchgängig gelang es, den Stoff nicht unwesentlich einfacher und einheitlicher zu gestalten. Die Vereinfachungen ergaben sich teils aus dem Zusammenhang des Ganzen, teils aus den mittlerweile gewonnenen neuen Einsichten. Die Knappheit des zur Verfügung stehenden Raumes zwang namentlich in dem vierten und fünften Kapitel öfter dazu, auf Zwischenrechnungen zu verzichten und sich mit Hinweisen auf die Originalarbeiten zu begnügen. Ein solches Verfahren hat den großen Vorteil, die Grundlinien der Überlegungen klar hervortreten zu lassen und erscheint dort als unbedenklich,

wo, wie im vorliegenden Falle, nirgends wesentliche Stücke der Beweise geopfert werden. An Vorkenntnissen werden außer den Grundlagen der Infinitesimalrechnung die Elemente der Potentialtheorie und der Theorie linearer Integralgleichungen vorausgesetzt.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, den Herren J. Schauder, V. A. Kostitzin, E. Hölder, V. Garten und K. Maruhn, die mich bei den Korrekturarbeiten in wirksamer Weise unterstützt hatten, auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank auszusprechen. Der Verlagsbuchhandlung, die trotz des Ernstes der allgemeinen wirtschaftlichen Lage die Herausgabe dieses Werkes ermöglicht hatte, gebührt mein innig empfundener Dank.

Leipzig, im Juni 1933.

Leon Lichtenstein.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Vorbereitendes aus der Potentialtheorie und der Hydrostatik.

Zweites Kapitel.

Allgemeine Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten.

Drittes Kapitel.

Neue Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft einer gegebenen Gleichgewichtsfigur. Homogene Flüssigkeiten.

Viertes Kapitel.

Neue nichthomogene Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft einer gegebenen, nicht notwendig homogenen Gleichgewichtsfigur.

Fünftes Kapitel.

Gleichgewichtsfiguren in der Umgebung einer die Gleichgewichtsbedingungen nur angenähert erfüllenden Konfiguration.

Erstes Kapitel.

Vorbereitendes aus der Potentialtheorie und der Hydrostatik.

1. Einige Eigenschaften des Newtonschen Potentials einer einfachen Flächenbelegung und einer Volumladung. 1. Es sei T ein beliebiges beschränktes Gebiet vom topologischen Typus einer Kugel im Raume der Variablen x, y, z, das ein bestimmtes Volumen im Sinne von Peano und Jordan hat, und es möge $\vartheta(x, y, z) = \vartheta(\tau)$ eine in T und auf dem Rande S von T, kürzer in dem Bereiche $T + S$, erklärte beschränkte, (im Riemannschen Sinne) integrierbare Funktion bezeichnen. Das Newtonsche Potential

$$V(x, y, z) = \int\limits_T \vartheta' \frac{1}{r} d\tau', \tag{1}$$

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \qquad d\tau' = dx' dy' dz'$$

ist eine in dem Gesamtraume nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige, im Unendlichen verschwindende Funktion. In dem Außengebiete stellt V eine im Endlichen überall reguläre Potentialfunktion dar. In dem unendlichfernen Punkte ist $V(x, y, z) = \frac{M}{R} + \overline{V}(x, y, z)$, ($R^2 = x^2 + y^2 + z^2$), unter M die Gesamtmasse $\int\limits_T \vartheta' d\tau'$, unter $\overline{V}(x, y, z)$ eine im Unendlichen reguläre Potentialfunktion verstanden. Dies besagt nach Plemelj, daß

$$\lim_{R \to \infty} \overline{V}(x, y, z) = \bar{c} \quad (\bar{c} \text{ konstant}), \qquad \lim_{R \to \infty} R^2 D_1 \overline{V} = 0 \quad \text{ist}^{1}. \tag{2}$$

Es gilt weiter für alle (x, y, z) in $T + S$, unter $\{\vartheta\}$ die obere Grenze von $|\vartheta|$ verstanden,

$$|V(x, y, z)| \leqq A_1 \{\vartheta\}, \qquad |D_1 V| \leqq A_2 \{\vartheta\} \quad (A_1, A_2 \text{ konstant}). \tag{3}$$

---

[1] In (2) bezeichnet $D_1 V$ irgendeine partielle Ableitung erster Ordnung von V. Vgl. J. Plemelj, Potentialtheoretische Untersuchungen, Leipzig 1911, S. 3—5. Übrigens folgt hieraus, daß $R^3 D_1 V$ beschränkt ist. Siehe Plemelj a. a. O. S. 14—15.

2. Für alle (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) in $T + S$ ist

$$(4)\quad \begin{aligned} &|D_1 V(x_1, y_1, z_1) - D_1 V(x_2, y_2, z_2)| < \{\vartheta\}\, d_{12}\,[A_3\,|\log d_{12}| + A_4], \\ &d_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2, \qquad (A_3, A_4 \text{ konstant}). \end{aligned}$$

Wie man sich leicht überzeugt, erfüllen hiernach $D_1 V$ in $T + S$ eine „Höldersche Bedingung" (mit einem beliebigen positiven Exponenten $\nu < 1$). Dies besagt, daß bei festgehaltenem (x_1, y_1, z_1) in $T + S$

$$(5)\quad |D_1 V|_\nu = \text{obere Grenze } |D_1 V(x_1, y_1, z_1) - D_1 V(x_2, y_2, z_2)|\, d_{12}^{-\nu} \leqq A_5(\nu)\,\{\vartheta\}$$

gilt. Hiernach ist für alle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) in $T + S$

$$|D_1 V(x_1, y_1, z_1) - D_1 V(x_2, y_2, z_2)| \leqq A_5(\nu)\,\{\vartheta\}\, d_{12}^{\nu},$$

woselbst $A_5(\nu)$ bei vorgegebenem $T + S$ nur noch von ν abhängt; $A_5(\nu)$ heißt der Höldersche Koeffizient, ν der Höldersche Exponent. Übrigens gilt dieser Satz unverändert für alle (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) in jedem beliebigen beschränkten Bereiche.

3. Es sei speziell T ein beschränktes Gebiet der Klasse Ah. Der zugehörige Höldersche Exponent heiße λ $(0 < \lambda < 1)$.[2] Es möge weiter ϑ in $T + S$ eine H-Bedingung mit demselben Exponenten λ, $|\vartheta|_\lambda \leqq B_1$, darum

$$(6)\quad |\vartheta(x_1, y_1, z_1) - \vartheta(x_2, y_2, z_2)| \leqq B_1\, d_{12}^{\lambda}$$

erfüllen. Alsdann sind die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung $D_2 V$ in $T + S$ vorhanden und stetig und erfüllen daselbst eine H-Bedingung mit dem Exponenten λ. Es gilt

$$(7)\quad |D_2 V| \leqq A_6 \operatorname{Max} |\vartheta| + A_7 B_1, \qquad |D_2 V|_\lambda \leqq A_8 \operatorname{Max} |\vartheta| + A_9 B_1.$$

Eine ganz analoge Eigenschaft hat V in jedem von S und einer beliebigen Kugel $\mathfrak{C}$ von hinreichend großem Radius begrenzten (abgeschlossenen) Teile des Außenbereiches.

4. Es sei S wieder eine Fläche der Klasse Ah, und es möge $\mu(\sigma)$ eine auf S erklärte stetige Ortsfunktion bezeichnen. Das Newtonsche Potential der einfachen Belegung

$$(8)\quad U(x, y, z) = \int_S \mu' \frac{1}{r}\, d\sigma', \qquad r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$$

stellt eine überall stetige, sowohl in dem Innen- als auch in dem Außen-

---

[2] Dies besagt, daß S eine Fläche mit stetiger Normale ist, und die Richtungskosinus der Normale einer Hölderschen Bedingung, kürzer einer H-Bedingung (mit dem Exponenten $\lambda > 0$), genügen.

gebiete reguläre Potentialfunktion dar, die sich im Unendlichen wie

(9) $$\frac{M}{R} + \text{reguläre Potentialfunktion}, \qquad M = \int_S \mu' d\sigma'$$

verhält. Es gilt ferner

(10) $$|U| \leqq A_{10} \operatorname{Max} |\mu|, \qquad |U|_\nu \leqq A_{11}(\nu) \operatorname{Max} |\mu|,$$

unter ν einen beliebigen positiven Wert < 1 verstanden.

5. Erfüllt $\mu(\sigma)$ überdies auf S eine H-Bedingung mit dem Exponenten λ, $|\mu|_\lambda \leqq B_2$, so sind $D_1 U$ sowohl in dem Innenbereiche als auch in jedem von S und $\mathfrak{C}$ begrenzten (abgeschlossenen) Teile des Außenbereiches vorhanden und erfüllen daselbst eine H-Bedingung mit dem Exponenten λ,

(11) $$|D_1 U| \leqq A_{12} \operatorname{Max} |\mu| + A_{13} B_2, \qquad |D_1 U|_\lambda \leqq A'_{12} \operatorname{Max} |\mu| + A'_{13} B_2.$$

Beim Passieren von S werden $D_1 U$ sich im allgemeinen sprungweise ändern. Die Tangentialableitungen verhalten sich freilich stetig.

6. Es sei T ein beschränktes Gebiet der Klasse Ah, und es mögen $\dot\xi, \dot\eta, \dot\zeta$ in $T + S$ erklärte stetige Funktionen bezeichnen, die stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Der zugehörige H-Exponent soll hierbei denselben Wert $\lambda < 1$ wie der H-Exponent von S haben. Es sei

(12) $$\Pi = \text{obere Grenze} \left\{ \left|\frac{\partial \dot\xi}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \dot\zeta}{\partial z}\right|; \left|\frac{\partial \dot\xi}{\partial x}\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial \dot\zeta}{\partial z}\right|_\lambda \right\}.$$

Es möge schließlich die Dichte ϑ stetig sein und ebenfalls einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen, $|\vartheta|_\lambda \leqq B_3$. Durch Vermittelung der Funktionen

(13) $$\dot x = x + \dot\xi, \qquad \dot y = y + \dot\eta, \qquad \dot z = z + \dot\zeta$$

wird, falls, wie vorausgesetzt werden soll, Π hinreichend klein, sagen wir

(14) $$\Pi \leqq \Pi^0$$

ist, $T + S$ auf einen Bereich $\dot T + \dot S$ der Klasse Ah topologisch abgebildet[3]. Betrachten wir das Newtonsche Potential einer Volumladung

(15) $$\dot V(\dot x, \dot y, \dot z) = \int_{\dot T} \frac{1}{\dot r} \dot\vartheta' d\dot\tau', \qquad \dot r^2 = (\dot x - \dot x')^2 + (\dot y - \dot y')^2 + (\dot z - \dot z')^2,$$
$$\dot\vartheta(\dot x, \dot y, \dot z) = \vartheta(x, y, z).$$

Nach 1., 2. und 3. erfüllen das Potential $\dot V(\dot x, \dot y, \dot z)$ und seine partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung Ungleichheiten von der Form

[3] Für das Zustandekommen einer solchen topologischen Abbildung genügt es, wenn $\dot\xi, \dot\eta, \dot\zeta$ stetige, dem absoluten Betrage nach hinreichend kleine partielle Ableitungen erster Ordnung haben.

(3), (4) und (7). Wir schreiben

$$(16)\quad \begin{gathered} |\dot{V}| \leqq A_{14}\,\mathrm{Max}\,|\vartheta|;\ \left|\frac{\partial \dot{V}}{\partial \dot{x}}\right|, \left|\frac{\partial \dot{V}}{\partial \dot{y}}\right|, \left|\frac{\partial \dot{V}}{\partial \dot{z}}\right| \leqq A_{15}\,\mathrm{Max}\,|\vartheta|; \\ \left|\frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial \dot{x}^2}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial \dot{z}^2}\right| \leqq A_{16}\,\mathrm{Max}\,|\vartheta| + A_{17} B_3; \\ \left|\frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial \dot{x}^2}\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial \dot{z}^2}\right|_\lambda \leqq A_{18}\,\mathrm{Max}\,|\vartheta| + A_{19} B_3. \end{gathered}$$

Die Konstanten A_{14} bis A_{19} gelten für alle der Ungleichheit (14) genügenden $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ gleichmäßig.

Es sei jetzt $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ ein weiteres System wie $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ beschaffener Funktionen, und es sei

$$(17)\quad \left|\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq \Pi, \quad \left|\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x}\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial z}\right|_\lambda \leqq \Pi.$$

Offenbar ist auch

$$(18)\quad \text{obere Grenze} \left\{ \left|\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial z}\right|; \left|\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x}\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial z}\right|_\lambda \right\} \leqq \Pi.$$

Es sei ferner

$$(19)\quad \begin{aligned} \Pi = \text{obere Grenze} \Bigg\{ & \left|\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z}\right|; \\ & \left|\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x}\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z}\right|_\lambda \Bigg\}. \end{aligned}$$

Durch Vermittelung der Funktionen

$$(20)\quad \hat{x} = x + \hat{\xi}, \quad \hat{y} = y + \hat{\eta}, \quad \hat{z} = z + \hat{\zeta}$$

wird $T + S$ auf einen Bereich der Klasse $A\,h$, er heiße $\hat{T} + \hat{S}$, topologisch abgebildet. Das Newtonsche Potential

$$(21)\quad \begin{gathered} \hat{V}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \int_{\hat{T}} \frac{1}{\hat{r}} \hat{\vartheta}' d\hat{\tau}', \\ (\hat{\vartheta}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \vartheta(x, y, z),\ \hat{r}^2 = (\hat{x} - \hat{x}')^2 + (\hat{y} - \hat{y}')^2 + (\hat{z} - \hat{z}')^2) \end{gathered}$$

erfüllt natürlich Beziehungen, die zu (16) ganz analog sind. Darüber hinaus bestehen Ungleichheiten von der Form

$$(22)\quad \begin{gathered} |\hat{V} - \dot{V}|, \left|\frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{V}}{\partial \dot{x}}\right|, \ldots \leqq A_{20}\, \Pi\, \mathrm{Max}\,|\vartheta|; \\ \left|\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \hat{x}^2} - \frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial \dot{x}^2}\right|, \ldots \leqq \Pi\,(A_{21}\,\mathrm{Max}\,|\vartheta| + A_{22} B_3); \\ \left|\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \hat{x}^2} - \frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial \dot{x}^2}\right|_\lambda, \ldots \leqq \Pi\,(A_{23}\,\mathrm{Max}\,|\vartheta| + A_{24} B_3). \end{gathered}$$ [4, 5]

---

[4] Wir fassen hierbei $\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \hat{x}^2} - \frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial \dot{x}^2}, \ldots$ als Funktionen von x, y und z auf.

[5] Man vergleiche hierzu meine beiden Aufsätze, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie I. Math. Zeitschr. **23** (1925), S. 72—88; IV. Sächsische Berichte **82** (1930), S. 265—344. Siehe auch meine in der Fußnote [41] genannte Monographie, S. 122—127.

2. Einige Sätze der Hydrostatik [6]. Wir stellen im folgenden einige spezielle Sätze über das Gleichgewicht homogener oder heterogener Flüssigkeiten, die inkompressibel oder kompressibel sein können, zusammen. Da es sich um den Ruhezustand handelt, Verschiebungen der Flüssigkeitsteilchen gegeneinander demnach nicht vorkommen, so spielt es weiter keine Rolle, ob man es mit ideellen oder mit zähen Flüssigkeiten zu tun hat.

Es möge sich zunächst um eine zusammenhängende Masse homogener[7], inkompressibler, gleich temperierter Flüssigkeit handeln, deren Oberfläche vollkommen frei ist. Das Gleichgewicht ist nur möglich, wenn ein eindeutiges Potential U der Einheitskräfte existiert. Die Äquipotentialflächen sind zugleich Flächen gleichen Druckes. Ist, wie wir annehmen wollen, der Außendruck konstant, so ist die freie Oberfläche zugleich eine Niveaufläche der Einheitskräfte. Ist p_0 der Außendruck, U_0 das Potential der Einheitskräfte an der freien Oberfläche, p und U die entsprechenden Werte in einem Punkte (x, y, z) der Flüssigkeitsmasse, f die Dichte, so gilt

$$U - U_0 = \frac{1}{f}(p - p_0). \tag{23}$$

Kann die Flüssigkeit Zugspannungen nicht widerstehen, so muß $p > 0$ sein. Als ein Grenzfall wird auf der freien Oberfläche, gegebenenfalls in einzelnen Punkten, auf einzelnen Linien oder Flächen im Innern der Flüssigkeitsmasse auch $p = 0$ zugelassen. Die vorstehenden Bedingungen sind für das Gleichgewicht auch hinreichend. Befindet sich die Flüssigkeit zur Zeit t_0 in Ruhe, so bleibt dieser Zustand dauernd erhalten.

Zu dem gleichen Ergebnis kommt man bei einer homogenen kompressiblen Flüssigkeit, insbesondere bei einem homogenen Gase[8], wenn die Temperatur überall konstant ist. Auch ändert sich nichts, wenn angenommen wird, daß die Flüssigkeit eine endliche Anzahl von Bereichen füllt, die auch einzelne Punkte oder Linien miteinander gemeinsam haben können. Die vorstehenden Gleichgewichtsbedingungen gelten aber auch, wenn es sich um ein System handelt, das aus mehreren verschiedenen homogenen Flüssigkeiten bei konstanter Temperatur besteht, falls die folgende Bedingung erfüllt ist: die Flüssigkeiten können zusammendrückbar oder unzusammendrückbar sein, bilden aber in allen Fällen jede für sich eine endliche Anzahl zusammenhängender Massen. Sie mischen sich also nicht miteinander. Auch die Trennungsflächen sind jetzt Flächen gleichen Potentials und gleichen Druckes.

---

[6] Man vergleiche hierzu die Ausführungen des achten Kapitels, S. 314—322 meiner Grundlagen der Hydromechanik, Berlin 1929.

[7] Die Dichte ist also lediglich eine Funktion der Temperatur, nicht aber auch noch explizite abhängig vom Ort.

[8] Jetzt ist die Dichte eine Funktion des Druckes und der Temperatur, in die der Ort nicht auch noch explizite eingeht.

Wir wenden uns jetzt dem allgemeineren Falle einer beliebigen inhomogenen kompressiblen oder nichtkompressiblen Flüssigkeit und einer beliebigen Temperaturverteilung zu und *setzen* diesmal *voraus*, daß die Einheitskräfte ein eindeutiges Potential haben. Dieser Fall liegt bsp. allemal dann vor, wenn es sich um gravitierende, der Wirkung sonstiger Kräfte entzogene Flüssigkeiten handelt. Bezüglich der Flüssigkeitsdichte wird angenommen, daß sie eine stetige, allenfalls abteilungsweise stetige Funktion des Ortes darstellt, bezüglich der Niveauflächen, daß sie, von den sogleich zu besprechenden Ausnahmen abgesehen, stetige Normale haben, ineinandergeschachtelt sind und einen (singulären) Punkt oder eine (singuläre) geschlossene Linie, gegen die sie konvergieren, umschließen. Der fragliche Punkt bzw. die eben genannte Linie sind als eine singuläre (degenerierte) Niveaufläche aufzufassen. Aber auch die alle anderen umschließende Äquipotentialfläche kann insofern eine Ausnahme bilden, als sie eine endliche Anzahl konischer Punkte oder Kanten haben darf. Notwendig und hinreichend für den Gleichgewichtszustand ist jetzt, daß die Niveauflächen der Einheitskräfte zugleich Flächen gleicher Dichte sind, und daß der Druck p, außer möglicherweise in einzelnen Punkten, auf einzelnen Linien oder Flächen, wo er verschwinden kann, einen positiven Wert hat. Die Äquipotentialflächen sind alsdann zugleich Flächen gleichen Druckes. Die freie Oberfläche, von der auch jetzt angenommen werden soll, daß sie unter konstantem Druck steht, ist wieder eine Niveaufläche. Natürlich liegt alledem die Voraussetzung zugrunde, daß die Temperatur sich mit der Zeit nicht ändert, sei es darum, weil die Wärmeleitfähigkeit gleich Null ist, sei es, weil die Temperatur durch geeignete Zu- oder Abfuhr der Wärme aufrechterhalten bleibt.

Liegt eine homogene zusammendrückbare (tropfbare oder gasförmige) Flüssigkeit vor[7], so sind die Niveauflächen zugleich Flächen gleicher Temperatur. Die vorstehenden Ergebnisse gelten unverändert, auch wenn die Dichte sich längs einer endlichen Anzahl geschlossener Flächen sprungweise ändern kann. Die Sprungflächen sind selber Niveauflächen der Einheitskräfte. Zu ganz analogen Resultaten gelangt man, wenn die Niveauflächen aus zwei Systemen wie vorstehend beschaffener Flächen bestehen, deren „Außenhüllen" längs einzelner Punkte oder Linien miteinander zusammenhängen.

3. Flüssigkeitsellipsoide. Elliptische Zylinder als Gleichgewichtsfiguren einer homogenen Flüssigkeit. Kann ein Ellipsoidkörper $T+S$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqq 1 \tag{24}$$

eine Figur des relativen Gleichgewichtes einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotierenden homogenen inkompressiblen Flüssigkeit der Dichte f sein, wenn der Außendruck verschwindet[9]?

[9] Und darum auch für beliebige Werte des (konstanten) Außendruckes.

Das Gesamtpotential der Gravitations- und Zentrifugalkräfte, das auf S einen konstanten Wert annehmen soll, ist, wenn $\varkappa$ die Gaußsche Gravitationskonstante bezeichnet,

$$\varkappa f \int_T \frac{d\tau'}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2), \tag{25}$$

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \qquad d\tau' = dx'\, dy'\, dz'.$$

Nach bekannten Sätzen ist in T und auf S

$$\frac{1}{f} V = \int_T \frac{d\tau'}{r} = \boldsymbol{D} - (\boldsymbol{A} x^2 + \boldsymbol{B} y^2 + \boldsymbol{C} z^2), \quad \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} = 2\pi, \tag{26}$$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{D} = \pi \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c} \int_0^\infty \frac{du}{\Delta}, \qquad \boldsymbol{A} = \pi \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c} \int_0^\infty \frac{du}{(\boldsymbol{a}^2 + u)\Delta}, \\ \boldsymbol{B} = \pi \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c} \int_0^\infty \frac{du}{(\boldsymbol{b}^2 + u)\Delta}, \qquad \boldsymbol{C} = \pi \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c} \int_0^\infty \frac{du}{(\boldsymbol{c}^2 + u)\Delta}, \\ \Delta^2 = (\boldsymbol{a}^2 + u)(\boldsymbol{b}^2 + u)(\boldsymbol{c}^2 + u). \end{gathered} \tag{27}$$ [10]

Die Werte $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ hängen, wie man sich leicht überzeugt, nur von den Achsenverhältnissen $a:b:c$ ab.

Die Frage kann offenbar so gefaßt werden: Gibt es eine Konstante H, so daß auf S

$$\boldsymbol{D}\varkappa f - \varkappa f(\boldsymbol{A} x^2 + \boldsymbol{B} y^2 + \boldsymbol{C} z^2) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = H,$$

d. h.

$$x^2\left(\frac{\omega^2}{2} - \boldsymbol{A}\varkappa f\right) + y^2\left(\frac{\omega^2}{2} - \boldsymbol{B}\varkappa f\right) - z^2 \boldsymbol{C}\varkappa f = H - \boldsymbol{D}\varkappa f \tag{28}$$

gilt? Wird aus (24) und (28) die Variable z eliminiert, so erhalten wir eine für alle x und y zu erfüllende Beziehung

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\omega^2}{2} - \boldsymbol{A}\varkappa f\right) + \frac{\boldsymbol{C}\varkappa f}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{c}^2\right)x^2 + \left(\left(\frac{\omega^2}{2} - \boldsymbol{B}\varkappa f\right) + \frac{\boldsymbol{C}\varkappa f}{\boldsymbol{b}^2}\boldsymbol{c}^2\right)y^2 \\ = H - \boldsymbol{D}\varkappa f + \boldsymbol{C}\varkappa f \boldsymbol{c}^2. \end{aligned} \tag{29}$$

Sie hat die drei weiteren Relationen

$$\boldsymbol{a}^2\left(\frac{\omega^2}{2} - \boldsymbol{A}\varkappa f\right) = \boldsymbol{b}^2\left(\frac{\omega^2}{2} - \boldsymbol{B}\varkappa f\right) = -\boldsymbol{c}^2\boldsymbol{C}\varkappa f = H - \boldsymbol{D}\varkappa f \tag{30}$$

zur Folge. Die beiden ersten Beziehungen stellen Gleichungen zur Bestimmung der Achsenverhältnisse $\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}:\boldsymbol{c}$ dar. Aus diesen und dem als bekannt vorauszusetzenden Gesamtvolumen der Flüssigkeit erhält man die Werte der Halbachsen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ selbst. Sind diese Größen einmal ermittelt, so liefert die dritte Gleichung den zugehörigen Wert von H.

---

[10] Vgl. bsp. P. Appell, Traité de Mécanique rationnelle, tome troisième, Équilibre et mouvement des milieux continus, III. Édition, Paris 1921, S. 110—115.

Das ganze Problem reduziert sich also auf eine Diskussion der Gleichungen

$$(31) \qquad \boldsymbol{a}^2(\lambda - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{b}^2(\lambda - \boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{c}^2\boldsymbol{C}, \quad \lambda = \frac{\omega^2}{2\varkappa f}.$$

Betrachten wir zunächst den besonderen Fall $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, der auf Rotationsellipsoide führt. Die Gleichungen (31) reduzieren sich auf die eine Gleichung

$$(32) \qquad \boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{A} - \lambda) = \boldsymbol{c}^2\boldsymbol{C}.$$

Aus dieser folgt $\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c}^2\boldsymbol{C} = \boldsymbol{a}^2\lambda > 0$, mithin wegen (27)

$$\pi \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{c}\left(\boldsymbol{a}^2\int_0^\infty \frac{du}{(\boldsymbol{a}^2+u)^2\sqrt{\boldsymbol{c}^2+u}} - \boldsymbol{c}^2\int_0^\infty \frac{du}{(\boldsymbol{a}^2+u)(\boldsymbol{c}^2+u)\sqrt{\boldsymbol{c}^2+u}}\right)$$

$$= \pi \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{c}^2)\int_0^\infty \frac{u\,du}{(\boldsymbol{a}^2+u)^2(\boldsymbol{c}^2+u)\sqrt{\boldsymbol{c}^2+u}} > 0,$$

demnach $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{c}$. Die Rotationsellipsoide sind also abgeplattet. Die Integrale (27) lassen sich jetzt durch elementare Funktionen auswerten. Es gilt

$$(33) \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} &= \frac{\pi}{k^3}((1+k^2)\operatorname{Arctg} k - k), & 0 < \operatorname{Arctg} k < \frac{\pi}{2}, \\ \boldsymbol{C} &= 2\pi\frac{1+k^2}{k^3}(k - \operatorname{Arctg} k), & k = \sqrt{\frac{\boldsymbol{a}^2}{\boldsymbol{c}^2} - 1}. \end{aligned}$$

Die Formel (32) ergibt

$$(34) \qquad \frac{\omega^2}{2\varkappa f} = \lambda = \frac{\pi}{k^3}((3+k^2)\operatorname{Arctg} k - 3k).$$

Eine Diskussion dieser Beziehung führt zu den folgenden Ergebnissen. Die Gleichung (34) hat reelle Wurzeln k, nur wenn

$$(35) \qquad \omega \leqq \omega'' = \sqrt{2\pi\varkappa f \cdot 0{,}2247\ldots}$$

ist. Jedem Wert der Winkelgeschwindigkeit $< \omega''$ lassen (32) und (33) zwei Werte von $\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}$, die sich stetig mit ω ändern, entsprechen. Man spricht mit Poincaré von zwei „linearen Reihen“ (vgl. S. 37) der Rotationsellipsoide und bezeichnet diese als Maclaurinsche Ellipsoide, da ihre Existenz zuerst von Maclaurin dargetan worden ist. Für $\omega \to \omega''$ gehen die beiden Rotationsellipsoide stetig in das zu ω'' gehörige Ellipsoid über, — die beiden linearen Reihen der Maclaurinschen Ellipsoide hängen in dem „Verzweigungspunkte“ ω'' zusammen. Geht ω gegen Null, so geht das eine Maclaurinsche Ellipsoid stetig in eine Kugel $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$, das andere in eine unendlich dünne Kreisfläche von unendlich großem Durchmesser, $\boldsymbol{c} \to 0$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \to \infty$, über.

Wie Jacobi (1834) zeigte, können die Gleichungen (31) noch eine reelle Lösung haben[11], die auf ein dreiachsiges Ellipsoid führt, $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{b} < \boldsymbol{a}$.

---

[11] Eine andere von der obigen nicht wesentlich verschiedene Lösung ergibt sich durch Vertauschung von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$.

Dies trifft für alle $\omega < \omega' = \sqrt{2\pi\varkappa f \cdot 0{,}1871\ldots} < \omega''$ zu. Auch diese Jacobischen Ellipsoide ändern sich stetig mit ω, bilden eine „lineare Reihe". Für $\omega \to \omega'$ geht das Jacobische Ellipsoid stetig in eines derjenigen Maclaurinschen Ellipsoide über, die dem Werte ω' der Winkelgeschwindigkeit entsprechen. Auch der Punkt ω' ist ein „Verzweigungspunkt", — hier hängen die linearen Reihen der Jacobischen und Maclaurinschen Ellipsoide zusammen. Für $\omega \to 0$ geht das Jacobische Ellipsoid in eine unendlich dünne, unendlich lange Nadel, $c \to 0$, $b \to 0$, $a \to \infty$, über.

Es ist nicht ohne Interesse, daß die Ellipsoidkörper (24) die einzigen Körper sind, deren Potential im Innern sich durch die Formel (26) bei geeigneten Festsetzungen über die Konstanten A, B, C und D ausdrückt[12].

Und nun einige Worte über die beiderseits unbegrenzten elliptischen Zylinderkörper

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1 \tag{36}$$

als Gleichgewichtsfiguren einer homogenen, mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotierenden Flüssigkeit der Dichte f. Das Newtonsche Potential (26) ist jetzt durch das logarithmische Potential

$$2\int \log\frac{r_0}{r}\, d\tau' \quad (r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2,\ d\tau' = dx'\,dy',\ r_0 \text{ konst.}), \tag{37}$$

die Integration über die Ellipsenfläche (36) erstreckt gedacht, zu ersetzen. Man sieht vor allem leicht ein, daß für beliebige Werte der Winkelgeschwindigkeit, sofern nur der Außendruck hinreichend groß ist, der gerade Kreiszylinderkörper $x^2 + y^2 \leqq a^2$ eine Gleichgewichtsfigur darstellt. Ist der Außendruck gleich Null, so darf ω den Wert $\sqrt{2\pi\varkappa f}$ nicht übersteigen, anderenfalls der Flüssigkeitsdruck negativ ausfallen würde.

Von der soeben genannten linearen Reihe der Kreiszylinderkörper zweigt für $\omega = \sqrt{\pi\varkappa f}$ eine lineare Reihe elliptischer Zylinderkörper (36) mit $a > b$ ab. Sie gehören zu den Werten der Winkelgeschwindigkeit $\omega < \sqrt{\pi\varkappa f}$. Der Außendruck kann dabei einen beliebigen (konstanten)

[12] Vgl. W. Nikliborc, Eine Bemerkung über die Volumpotentiale, Math. Zeitschr. **35** (1932), S. 625—631 (eingegangen am 8. 12. 1930) beweist den obigen Satz in Bestätigung einer Vermutung von E. Hölder. Vgl. auch E. Hölder, Über eine potentialtheoretische Eigenschaft der Ellipse, ebenda S. 632—643. Einen anderen Beweis verdankt man P. Dive, Comptes Rendus **192** (1931), S. 1443—1446, sowie **193** (1931), S. 141—142. Siehe auch P. Dive, Attraction des ellipsoïdes homogènes et réciproque d'un théorème de Newton, Bulletin de la Société mathématique de France **59** (1931), S. 128—140. Hier werden auch Gebiete, begrenzt von zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden, betrachtet. Hierzu auch W. Nikliborc, Eine Bemerkung über die Volumpotentiale II, Math. Zeitschr. **36** (1932), S. 167—170.

Wert $\geqq 0$ haben. Es gilt

$$\frac{a-b}{a+b} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\pi \varkappa f}}. \tag{38}$$

Für $\omega \to 0$ geht a gegen Unendlich; der Ellipsenkörper (36) geht in eine unendlich lange in der Richtung der x-Achse sich erstreckende Nadel über[13].

Zweites Kapitel.

Allgemeine Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten.

4. Homogene Flüssigkeiten. In dem Raume der kartesischen Koordinaten x, y und z sei eine Anzahl beschränkter Gebiete ${}_jT$ $(j = 1, \ldots, q)$, deren Gesamtheit mit T bezeichnet werden soll, gegeben. Von der Begrenzung ${}_jS$ der Gebiete ${}_jT$ wird zunächst nur vorausgesetzt, daß sie aus einer endlichen Anzahl geschlossener, doppelpunktloser, stetiger Flächen besteht, von denen jede einzelne einen Raumteil, der ein bestimmtes Volumen im Sinne von Peano und Jordan hat, begrenzt[14]. Den Raum T denken wir uns mit einer homogenen, unzusammendrückbaren Flüssigkeit der Dichte f erfüllt, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen[15]. Weitere Kräfte liegen nicht vor, insbesondere soll der Außendruck gleich Null sein. Wir bezeichnen das Newtonsche Potential von T mit $V(x, y, z)$, die Gaußsche Gravitationskonstante mit $\varkappa$. Die Flüssigkeit und mit ihr zugleich das Achsenkreuz x-y-z soll jetzt um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω wie ein starrer Körper gleichförmig rotieren. Will man feststellen, unter welchen Bedingungen das relative Gleichgewicht möglich ist, so hat man, wie man weiß, zu den Attraktionskräften die Zentrifugalkräfte, deren Potential den Wert $\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ hat, hinzuzufügen. Den Ausführungen auf S. 5—6 zufolge läuft die für das Gleichgewicht notwendige und hin-

[13] Vgl. B. Globa-Mikhaïlenko, Figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation, infiniment voisine d'un cylindre elliptique, Comptes rendus **159** (1914), S. 646 und Sur quelques nouvelles figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation, Journal des Mathématiques (7) **2** (1916), S. 1—78, insb. S. 1—36.

[14] Wie sich bald zeigen wird, besteht der Rand eines jeden Gebietes T tatsächlich aus einer einzigen geschlossenen Fläche.

[15] Gelegentlich werden wir darüber hinaus annehmen, daß jeder Raumteil ${}_jT$ mit einer homogenen Flüssigkeit der Dichte f_j erfüllt sei, indessen nicht alle f_j den gleichen Wert haben. Für die Gesamtheit aller f_j wird auch in diesem Falle kürzer f geschrieben.

reichende Bedingung darauf hinaus, daß das Gesamtpotential der Einheitskräfte

$$(1) \qquad U(x, y, z) = \varkappa V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2} \mathfrak{r}^2, \qquad \mathfrak{r}^2 = x^2 + y^2,$$

$$(2) \qquad V(x, y, z) = \int_T \frac{f'}{r} \, d\tau', \qquad r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \quad d\tau' = dx' \, dy' \, dz'$$

auf einer jeden Komponente $\bar{S}$ der Gesamtbegrenzung S einen konstanten Wert hat und in T überall, gegebenenfalls mit Ausnahme einzelner Punkte, Linien oder Flächen $p > 0$ ist. Übrigens wird später gezeigt werden, daß, wenn die zuerst genannte Bedingung erfüllt ist, p sich in T tatsächlich überall > 0 erweist, für das Gleichgewicht demnach notwendig und hinreichend ist, daß $\varkappa V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2} \mathfrak{r}^2$ auf $\bar{S}$ jedesmal einen konstanten Wert hat. Haben zwei Begrenzungskomponenten verschiedener Gebiete ${}_jT$ auch nur einen Punkt gemeinsam, so sind die entsprechenden Konstanten einander gleich. Aber auch auf verschiedenen Randkomponenten eines und desselben Gebietes ${}_jT$ haben die in Betracht kommenden Konstanten denselben Wert, da der Außendruck überall gleich groß, nämlich, wie wir stets annehmen dürfen, gleich Null ist[14].

Die Gleichung von $\bar{S}$ kann demnach auf die Form

$$(3) \qquad U(x, y, z) = \varkappa V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = \text{Const.}$$

gebracht werden. Das Newtonsche Potential $V(x, y, z)$ hat überall stetige partielle Ableitungen erster Ordnung (vgl. **1.** 1.), also hat $U(x, y, z)$ die gleiche Eigenschaft. Die Schwerkraft, d. h. Resultierende aus der Anziehungs- und der Zentrifugalkraft hat den Wert

$$(4) \qquad \psi(x, y, z) = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ist ψ in einem Punkte $P_0(x_0, y_0, z_0)$ auf $\bar{S}$ von Null verschieden, so können dort $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ nicht gleichzeitig verschwinden. Ist etwa $\frac{\partial U}{\partial z} \neq 0$, so läßt sich die Gleichung (3) nach z auflösen, $z = z(x, y)$. Die Fläche $\bar{S}$ hat in P_0 und in einer Umgebung dieses Punktes eine stetige Normale. Diese kann nur dort fehlen, wo die Schwerkraft verschwindet. Ist die Schwerkraft auf dem Rande überall von Null verschieden, so zerfällt T in eine Anzahl *getrennter* Massen, die von Flächen mit stetiger Normale begrenzt sind. Beachtet man den Satz **1.** 2 (S. 2), so findet man leicht, daß dann alle Randkomponenten tatsächlich der Klasse Ah angehören. Dem Satze **1.** 3 (S. 2) zufolge besitzt $U(x, y, z)$ stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen zweiter Ordnung;

$z(x, y)$[16] hat augenscheinlich die gleiche Eigenschaft. Wir sagen, $\overline{S}$ gehöre der Klasse Bh an. Man findet so allmählich, daß $z(x, y)$[16] stetige Ableitungen aller Ordnungen hat. Das gleiche gilt, auch wenn die Schwerkraft auf S verschwinden kann, in der Umgebung aller Punkte, in denen dies nicht der Fall ist. Vermutlich sind alle Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Flüssigkeit analytisch[17].

Der Schwerpunkt von T liegt auf der Umdrehungsachse. Man sieht dies am einfachsten ein, indem man für einen Augenblick die rotierende Flüssigkeit auf ein festes Koordinatensystem bezieht. Da die einzigen jetzt wirkenden Kräfte innere Kräfte sind, so wird der Schwerpunkt ruhen oder sich geradlinig und gleichförmig bewegen. Die zweite Möglichkeit ist ausgeschlossen, die erste ist aber nur erfüllbar, wenn der Schwerpunkt auf der Umdrehungsachse liegt.

Wir nehmen an, daß der Schwerpunkt mit dem Koordinatenursprunge zusammenfällt.

Die Ebene $z=0$ ist stets eine Symmetrieebene des Körpers T.[18] Wir verstehen unter einer Sehne von S jede Strecke, deren Endpunkte auf S liegen und deren alle übrigen Punkte sich im Innern von T befinden. Eine beliebige Sekante kann aus $T+S$ endlich oder abzählbar unendlichviele Sehnen herausschneiden. Endpunkt einer Sehne kann zugleich Anfangspunkt einer anderen Sehne sein. Es sei Σ die Menge der Mittelpunkte aller zu der z-Achse parallelen Sehnen von S. Wir haben vorhin vorausgesetzt, daß S aus einer endlichen Anzahl geschlossener, doppelpunktloser, stetiger Flächen besteht, von denen jede einen Raumteil begrenzt, der ein bestimmtes Volumen im Sinne von Peano und Jordan hat. Wir nehmen jetzt darüber hinaus an, daß Σ aus einer endlichen oder abzählbar unendlichen Anzahl zweidimensionaler Kontinuen ${}^j\Sigma$ $(j=1, 2, \ldots)$ besteht. Die Gleichung von ${}^j\Sigma$ ist in der Form $z={}^j\mathfrak{z}(x, y)$ darstellbar, unter ${}^j\mathfrak{z}(x, y)$ eine in einem Gebiete ${}^j\mathfrak{t}$ der x-y-Ebene erklärte stetige Funktion verstanden.

---

[16] Wie alle anderen zur Darstellung von $\overline{S}$ in Betracht kommenden, durch Auflösung von $U(x, y, z) =$ Const. gewonnenen Funktionen.

[17] Vgl. meine Abhandlung, Über einige Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, 1918, S. 1120—1135, insb. S. 1122.

[18] Die unmittelbar folgenden Ausführungen reproduzieren in vereinfachter und verschärfter Fassung den Beweis, den ich für den fraglichen Satz loc. cit. [17] S. 1123 bis 1124 gegeben habe. Er lehnt sich an gewisse Betrachtungen von W. Blaschke und T. Carleman an. Vgl. W. Blaschke, Eine isoperimetrische Eigenschaft des Kreises, Math. Zeitschr. **1** (1918), S. 52—57, sowie T. Carleman, Über eine isoperimetrische Aufgabe und ihre physikalischen Anwendungen, ebenda **3**, S. 1—7. An der bezeichneten Stelle beweist Carleman u. a. den Satz, die einzige Gleichgewichtsfigur einer ruhenden gravitierenden homogenen Flüssigkeitsmasse ist eine Kugel. Dem Beweise werden Gebiete zugrunde gelegt, die von einer endlichen Anzahl stetig gekrümmter Flächen begrenzt sind.

Ist nun Σ nicht ganz in der Ebene $z=0$ gelegen, so gibt es mindestens einen Punkt $Q(x_0, y_0, z_0)$ in T oder auf S, der so beschaffen ist, daß z_0 die obere Grenze aller z-Werte auf Σ darstellt und es ein zweidimensionales Kontinuum von Punkten auf Σ gibt, deren z-Koordinate um beliebig wenig kleiner als z_0 ist. Wir nehmen zunächst an, daß Q im Innern einer der vorliegenden Flüssigkeitsmassen, etwa in ${}_jT$, liegt. In diesem Falle ist gewiß $z_0 = \operatorname{Max} z$ auf Σ. Die Gerade $x=x_0$, $y=y_0$ kann S in endlich- oder unendlichvielen Punkten treffen. Es seien $P_1(x_0, y_0, z_1)$ und $P_2(x_0, y_0, z_2)$ die dem Punkte Q nächstliegenden Treffpunkte, und es sei $z_1 > z_2$. Der Ausdruck

$$\varkappa V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) \tag{5}$$

hat auf allen Randkomponenten von ${}_jT$ denselben Wert. Es muß daher

$$V(x_0, y_0, z_1) = V(x_0, y_0, z_2) \tag{6}$$

sein. Es sei D die Projektion von S auf die Ebene $z=0$. Es gilt

$$\begin{gathered} V(x_0, y_0, z_*) = \int\limits_D dx\, dy \int f \frac{1}{r}\, dz \\ (r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_*)^2), \end{gathered} \tag{7}$$

wobei die Integration nach z über die endlich oder abzählbar unendlichvielen Strecken, welche die durch den Punkt (x, y) von D hindurchgehende, zu der z-Achse parallele Gerade L mit T gemeinsam hat, ausgedehnt zu denken ist[19]. Es seien z' und z'' die Endpunkte irgendeiner dieser Strecken, und es sei $z' > z''$. Wie man sich ohne Mühe überzeugt, ist, unter $r(z, z_1)$ und $r(z, z_2)$ die Entfernungen der Punktepaare (x, y, z), (x_0, y_0, z_1) und (x, y, z), (x_0, y_0, z_2) verstanden,

$$\int\limits_{z''}^{z'} f \frac{1}{r(z, z_1)}\, dz \leqq \int\limits_{z''}^{z'} f \frac{1}{r(z, z_2)}\, dz, \tag{8}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn die Schwerpunkte der beiden Sehnen (z_1, z_2), (z', z'') die gleiche z-Koordinate haben. Es gibt aber gewiß ein zweidimensionales Kontinuum von Wertepaaren x, y, so daß für die durch $(x, y, 0)$ hindurchgehenden Sehnen in (8) das Zeichen $<$ zutrifft. Aus (7) und (8) würde darum, wie man leicht sieht, im vorliegenden Falle $V(x_0, y_0, z_1) < V(x_0, y_0, z_2)$ folgen, was (6) widerspricht.

---

[19] Nach einem bekannten Satz von G. Fubini, Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei (5) **16**$_1$ (1907), S. 608—614. Vgl. auch C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, zweite Auflage, Berlin und Leipzig 1927, S. 621 bis 641. Das Integral über D ist im allgemeinen als ein Integral im Lebesgueschen Sinne aufzufassen.

Es bleibt noch der Fall zu untersuchen, daß die obere Grenze der z-Koordinate aller Punkte von Σ in einem Punkte (x_0, y_0, z_0) auf S erreicht wird. Ist die Schwerkraft in (x_0, y_0, z_0) gleich Null, so ist $\frac{\partial}{\partial z} U(x_0, y_0, z_0) = 0$, mithin auch $\frac{\partial}{\partial z} V(x_0, y_0, z_0) = 0$. Ist aber die Schwerkraft in (x_0, y_0, z_0) von Null verschieden, hat mithin S in (x_0, y_0, z_0) und einer Umgebung $\mathfrak{S}$ dieses Punktes eine stetige Normale, so muß die Gerade $x = x_0$, $y = y_0$ die Fläche S in (x_0, y_0, z_0) berühren, so daß auch jetzt $\frac{\partial}{\partial z} U(x_0, y_0, z_0) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial z} V(x_0, y_0, z_0) = 0$ ist. Dies sieht man leicht wie folgt ein: Sonst wäre $z = \overset{*}{z}(x, y)$ die Gleichung eines Stückes $\mathfrak{S}$ von S in der Umgebung von (x_0, y_0, z_0). Vor allem ist es klar, daß für ein hinreichend kleines ε alle Punkte (x, y, z) mit $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqq \varepsilon^2$ und $\overset{*}{z}(x, y) < z < \overset{*}{z}(x, y) + \varepsilon$ außerhalb von T gelegen sind. Anderenfalls würden sie allemal T selbst angehören, und es gäbe gewiß Sehnen, deren Mittelpunkt um mehr als z_0 über der Ebene $z = 0$ liegt. Nunmehr wollen wir aus der Gesamtheit der Sehnen (z_1, z_2) eine Folge $\{z_{1n}, z_{2n}\}$ extrahieren, deren Mittelpunkte gegen (x_0, y_0, z_0) konvergieren. Die von einem n an auf $\mathfrak{S}$ gelegenen Endpunkte z_{1n} $(> z_{2n})$ konvergieren gegen z_0, — folglich müssen auch z_{2n} gegen z_0 konvergieren. Dies ist aber nicht möglich, da, wie wir eben sahen, für ein hinreichend kleines ε alle Punkte (x, y, z) mit $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqq \varepsilon^2$ und $\overset{*}{z}(x, y) > z > \overset{*}{z}(x, y) - \varepsilon$ dem Innern von T angehören.

Wie man ohne ernste Schwierigkeiten sieht, kann man für $\frac{\partial}{\partial z} V(x_0, y_0, z_0) = 0$ auch schreiben

$$\int\limits_D dx\, dy \int f \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{1}{r(z_0, z)} dz = 0, \tag{9}$$

die Integration nach z über alle Intervalle, die L mit T gemeinsam hat, erstreckt gedacht. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r(z_0, z)} = -\frac{\partial}{\partial z_0} \frac{1}{r(z_0, z)}$$

folgt aus (9) weiter

$$\int\limits_D dx\, dy \int f \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r(z_0, z)} dz = \int\limits_D dx\, dy \int \sum f \left(\frac{1}{r(z_0, z')} - \frac{1}{r(z_0, z'')} \right) = 0. \tag{10}$$

Diese Beziehung ist aber, wie man fast unmittelbar sieht, unmöglich. Demnach ist Σ *ein* ebenes Gebiet. *Also hat jede Gleichgewichtsfigur rotierender homogener Flüssigkeit eine auf der Umdrehungsachse senkrechte Symmetrieebene.* Augenscheinlich ist die Rotationsachse, in unserem Falle die z-Achse eine Hauptträgheitsachse des Flüssigkeitskörpers.

Durch die vorstehenden Betrachtungen ist ferner bewiesen, daß keine zu der Rotationsachse parallele Gerade, welche den Flüssigkeitskörper trifft, mit seiner Begrenzung mehr als zwei Punkte gemeinsam

haben kann. Man beachte, daß in den Punkten etwaiger auf S gelegener zur z-Achse paralleler Strecken $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$, somit auch $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ sein müßte. Besteht T aus mehreren Einzelmassen, die voneinander getrennt sind, so liegen diese Massen demnach „nebeneinander", nicht „übereinander". Dies besagt, daß es keine zu der z-Achse parallele Gerade gibt, die mehr als eine Masse trifft. Hängen zwei oder mehr Massen in einzelnen (auch unendlichvielen) Punkten zusammen, so liegen diese Punkte auf der Symmetrieebene. Ist B ein Punkt dieser Art, so hat die durch B zu der z-Achse parallele Gerade keine weiteren Punkte mit der Flüssigkeit gemeinsam. — Man sieht ferner, daß *jede* Flüssigkeitsmasse von einem einzigen Kontinuum begrenzt ist. Es gibt keine Hohlräume. Hat S eine stetige Normale, so fällt diese in allen Punkten der Symmetrieebene in diese hinein.

Alle bisher abgeleiteten Sätze gelten, wie man sich leicht überzeugt, unverändert, auch wenn die Dichte in einem jeden Gebiete ${}_jT$ einen anderen (konstanten) Wert f_j hat.

Ruht die Flüssigkeit, so kann jede Gerade durch den Schwerpunkt als Rotationsachse gelten. Keine Gerade, die den Flüssigkeitskörper trifft, kann mit seiner Berandung mehr als zwei Punkte gemeinsam haben. Also besteht T aus einer einzigen Flüssigkeitsmasse. Jede Ebene durch den Schwerpunkt ist eine Symmetrieebene. *Die einzige Figur des Gleichgewichtes einer ruhenden homogenen gravitierenden Flüssigkeit ist darum eine Kugel.* Dieser Satz ist zuerst von Carleman bewiesen worden[20].

Unsere Sätze gelten ferner unverändert, auch wenn es sich um eine homogene reibungslose Flüssigkeit handelt, die nicht wie ein starrer Körper rotiert, sondern in einer stationären Bewegung begriffen ist, bei der jedes Flüssigkeitsteilchen um die z-Achse rotiert mit einer Winkelgeschwindigkeit, die nur von seinem Abstande von der Umdrehungsachse, die wir diesmal zur z-Achse eines festen Achsenkreuzes wählen, abhängt, $\omega = \omega(\mathfrak{r}^2)$, $(\mathfrak{r}^2 = x^2 + y^2)$. Der Außendruck wird auch jetzt überall als gleich groß, und zwar ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich Null vorausgesetzt. Mit stationären Bewegungen dieser Art haben sich R. Wavre und P. Dive beschäftigt[21]. Wie man fast unmittelbar sieht, hat T diesmal jedenfalls Rotationssymmetrie um die z-Achse. Wir bezeichnen, wie üblich, die Komponenten der Geschwindig-

---

[20] Vgl. die Fußnote [18]. A. a. O. beweist Carleman auch den älteren Satz von Liapounoff, demzufolge jede stabile, d. h. dem absoluten Minimum der Energie entsprechende Figur des Gleichgewichtes einer ruhenden homogenen gravitierenden Flüssigkeit eine Kugel sei. Man vergleiche hierzu unsere späteren sich auf nichthomogene Flüssigkeiten beziehenden Entwicklungen (S. 28).

[21] Vgl. P. Dive, Rotations internes des astres fluides, Paris 1930, Librairie scientifique Albert Blanchard, S. 1—90; R. Wavre, Figures planétaires et géodésie, Cahiers scientifiques, Fascicule XII, VIII u. 194 S., Paris 1932. Dort findet sich die weitere Literatur angegeben.

keit eines Flüssigkeitsteilchens mit u, v, w, die konstante Dichte wie vorhin mit f, den Druck mit p. Die Eulerschen Gleichungen der Bewegung

$$(11) \quad \frac{du}{dt} = \varkappa \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{f}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = \varkappa \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{f}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = \varkappa \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{f}\frac{\partial p}{\partial z}$$

liefern im vorliegenden Falle

$$(12) \quad \begin{gathered} -\omega^2 x = \varkappa \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{f}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad -\omega^2 y = \varkappa \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{f}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ 0 = \varkappa \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{f}\frac{\partial p}{\partial z}, \end{gathered}$$

somit nach einer Integration längs irgendeines von (x^0, y^0, z^0) nach (x, y, z) führenden Weges

$$(13) \quad \begin{aligned} &-\int_{\mathfrak{r}^0}^{\mathfrak{r}} \omega^2 (\mathfrak{r}'^2)\, \mathfrak{r}' d\mathfrak{r}' \\ &= \varkappa \left(V(x, y, z) - V(x^0, y^0, z^0)\right) - \frac{1}{f}\left(p(x, y, z) - p(x^0, y^0, z^0)\right) \end{aligned}$$

und mit

$$\Phi(\mathfrak{r}^2) = \int_0^{\mathfrak{r}} \omega^2 (\mathfrak{r}'^2)\, \mathfrak{r}' d\mathfrak{r}',$$

wenn wir speziell (x^0, y^0, z^0) auf einer Komponente der Flüssigkeitsoberfläche annehmen,

$$(14) \quad \begin{aligned} &\varkappa V(x, y, z) + \Phi(\mathfrak{r}^2) - \frac{1}{f} p(x, y, z) \\ &= \varkappa V(x^0, y^0, z^0) + \Phi(\mathfrak{r}^{0\,2}) - \frac{1}{f} p(x^0, y^0, z^0) = \text{Const.} \end{aligned}$$

In allen Punkten auf S hat diesmal augenscheinlich $\varkappa V(x, y, z) + \Phi(\mathfrak{r}^2)$ den gleichen Wert. Dies ist die notwendige und, verbunden mit der Forderung $p > 0$ in T, wie man sich leicht überzeugt, auch hinreichende Bedingung dafür, daß eine stationäre Bewegung von der vorhin genannten Art existiert. (An einzelnen Punkten, Linien oder Flächen wird auch $p = 0$ zugelassen.) Der Druck in einem beliebigen Punkte (x, y, z) der Flüssigkeitsmasse berechnet sich aus (14) zu

$$(15) \quad p(x, y, z) = \varkappa f V(x, y, z) + f\Phi(\mathfrak{r}^2) + fc \qquad (c \text{ konstant}).$$

In dem besonderen Falle einer wie ein starrer Körper rotierenden Flüssigkeit ist $\Phi(\mathfrak{r}^2) = \frac{\omega^2 \mathfrak{r}^2}{2}$. Die Formel (15) gibt darum

$$(16) \quad \frac{1}{f} p(x, y, z) = \varkappa V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + c.$$

Die zuletzt gewonnenen Formeln unterscheiden sich von der eingangs benutzten nur dadurch, daß für $\frac{\omega^2 \mathfrak{r}^2}{2}$ diesmal $\Phi(\mathfrak{r}^2)$ tritt. Es ist darum leicht einzusehen, daß, worauf Herr Wavre zuerst aufmerksam machte, der Satz von der Existenz einer auf der Rotationsachse senkrechten Symmetrieebene und alle aus ihm vorhin gezogenen Folgerungen auch

in dem allgemeineren Falle der zuletzt betrachteten stationären Umlaufsbewegung gelten. Übrigens gilt, wie bereits erwähnt, ein ganz analoger Satz für gewisse nichthomogene Gleichgewichtsfiguren, — die Bemerkung von Herrn Wavre bezieht sich eigentlich auf diesen allgemeineren Fall. Wir werden auf diesen Gegenstand alsbald ausführlicher zurückkommen, wollen indessen, um den Zusammenhang nicht zu unterbrechen, vorher noch einige weitere Sätze über homogene wie ein starrer Körper rotierende Flüssigkeiten ableiten.

Nach Poincaré muß die Winkelgeschwindigkeit der Beziehung

$$\omega^2 < 2\pi\varkappa f \tag{17}$$

genügen. Sein Beweis geht von der Forderung aus, die Schwerkraft, d. h. die Resultierende aus der Anziehungs- und der Zentrifugalkraft, müsse, falls der Außendruck, wie wir vorhin vorausgesetzt hatten, gleich Null ist, auf S nach innen gerichtet sein, setzt also, beiläufig bemerkt, voraus, daß T aus getrennten, von stetig gekrümmten Flächen begrenzten Bereichen besteht (vgl. S. 11). Daß ω^2 nicht gleich $2\pi\varkappa f$ sein kann, läßt sich mit Herrn Crudeli ohne jede Annahme über die Richtung und den Wert der Schwerkraft auf S wie folgt beweisen[22].

Für $\omega^2 = 2\pi\varkappa f$ wäre in T

$$\Delta U = 0, \tag{18}$$

demnach in ${}_jT$ und auf ${}_jS$ $(j = 1, \ldots, q)$

$$U = \varkappa V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = c_j \quad (c_j \text{ konstant}). \tag{19}$$

Augenscheinlich ist $\frac{\partial U}{\partial z}$ durchweg stetig und stellt eine in dem Außengebiete T_a von T überall, auch in dem unendlich fernen Punkte, reguläre Potentialfunktion dar. Wegen (19) ist $\frac{\partial U}{\partial z}$ in T und auf S gleich Null, verschwindet auch noch im Unendlichen, ist somit identisch gleich Null; U, darum auch V wäre von z unabhängig, was nicht möglich ist.

Wir beweisen, daß für $\omega^2 \geqq 2\pi\varkappa f$ die Bedingung (3) *nicht erfüllt sein kann. Es müßte demnach, damit das Gleichgewicht möglich sei, auch wenn die Flüssigkeit Zugkräften widerstehen könnte, $\omega^2 < 2\pi\varkappa f$ sein. Die Bedingung* (3) *ist demnach die wahre Wurzel der Poincaréschen Schranke.* Es ist wesentlich, daß wir dabei nur geringfügige einschränkende Voraussetzungen über den Charakter der Randflächen ${}_jS$ einzuführen brauchen.

Offenbar folgt aus unserem Satze, daß für $\omega^2 \geqq 2\pi\varkappa f$ das Gleichgewicht nicht möglich ist, auch wenn die Flüssigkeit unter einem konstanten beliebig starken Außendruck steht. Poincaré scheint mit der Möglichkeit einer den Wert $\sqrt{2\pi\varkappa f}$ übertreffenden Winkelgeschwindigkeit bei Zulassung eines hinreichend hohen Außendruckes gerechnet zu

[22] Vgl. U. Crudeli, Il Nuovo Cimento (5) **17** (1909), S. 168—173. Siehe auch U. Crudeli, Giornale di Matematiche **47** (1909), S. 374—380.

haben. Durch Erwägungen mehr heuristischer Natur ist er daraufhin zu der Folgerung geführt worden, daß, wenn es für hinreichend hohe Werte von ω überhaupt Gleichgewichtsfiguren einer homogenen Flüssigkeit gibt, diese von dem topologischen Typus eines Kreisringkörpers sein müssen[23]. Dieses Ergebnis erscheint im Lichte unseres Satzes als gegenstandslos.

Es sei T_0 irgendeine der Flüssigkeitsmassen, und es sei S_0 ihre, wie wir schon wissen, aus einem einzigen Kontinuum bestehende Berandung. Der Ausdruck

$$(20)\qquad U(x, y, z) = \varkappa V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

hat auf S_0 einen konstanten Wert U_0 und genügt in T_0 der Differentialgleichung

$$(21)\qquad \Delta U = -4\pi\varkappa f + 2\omega^2.$$

Ist zunächst $\omega^2 < 2\pi\varkappa f$, so ist nach (21) in T gewiß $\Delta U < 0$. Dies hat aber zur Folge, daß in T überall $U > U_0$ ausfällt. Andernfalls hätte nämlich U in einem Punkte Q in T ein Minimum ($\leqq U_0$), und es wäre in Q: $\Delta U \geqq 0$. Aus $U > U_0$ folgt, wenn wie im vorliegenden Falle der Außendruck gleich Null ist,

$$(22)\qquad \frac{1}{f} p(x, y, z) = U(x, y, z) - U_0 > 0.$$

Im Innern der Flüssigkeit herrscht Druck[24]. Ist die Schwerkraft in einem Punkte A auf S_0 von Null verschieden, so hat S_0 in A eine stetige Normale. Wegen $U > U_0$ ist offenbar die Schwerkraft in A nach dem Innern von T gerichtet. *Auf der Gesamtberandung von T ist demnach die Schwerkraft entweder in das Innere der Flüssigkeit gerichtet oder gleich Null.*

Ist

$$(23)\qquad \omega^2 = 2\pi\varkappa f \quad \text{oder} \quad \omega^2 > 2\pi\varkappa f,$$

so erhält man, wie eine analoge Betrachtung lehrt, entsprechend

$$(24)\qquad U(x, y, z) = U_0 \quad \text{oder} \quad U(x, y, z) < U_0.$$

Oberhalb der Poincaréschen Schranke müßten demnach im Innern der Flüssigkeit überall Zugspannungen herrschen. Für $\omega^2 = 2\pi\varkappa f$ wäre die Flüssigkeit spannungslos.

Wiederholt man die vorstehenden Überlegungen unter Zugrundelegung der Annahme, die Dichte der Flüssigkeit habe in ${}_jT$ einen konstanten Wert f_j, wobei die f_j nicht notwendig alle einander gleich sind, so gelangt man zu ganz analogen Ergebnissen, nur daß diesmal $f_{\mathrm{Min}} = \mathrm{Min}\, f_j$ an Stelle von f tritt.

---

[23] Vgl. H. Poincaré, Figures d'équilibre d'une masse fluide, Paris 1902, S. 27 bis 28.

[24] Vgl. loc. cit. [17] S. 1129.

Es ist jetzt nicht schwer zu zeigen, daß die Beziehung $\omega^2 \geqq 2\pi\varkappa f$ bzw. $\omega^2 \geqq 2\pi\varkappa f_{\text{Min}}$ mit der Gleichgewichtsbedingung (3) nicht vereinbar ist.

Es möge zunächst die Dichte überall den gleichen Wert haben. Es sei z_{Max} der Höchstwert der z-Koordinate aller Punkte von S, und es sei z_k irgendein positiver Wert $< z_{\text{Max}}$. Der oberhalb der Ebene $z = z_k$ gelegene Teil von T heiße Θ, sein Spiegelbild in bezug auf die Ebene $z = z_k$ sei mit $\overline{\Theta}$ bezeichnet. Da jede zu der z-Achse parallele Gerade, die T trifft, wie vorhin bewiesen, mit S nicht mehr als zwei (in bezug auf die Ebene $z = 0$ symmetrisch gelegene) Punkte gemeinsam hat, so ist $\Theta + \overline{\Theta}$ gewiß in T enthalten. Betrachten wir irgendeinen Punkt (x_k, y_k, z_k) der Ebene $z = z_k$, der so beschaffen ist, daß die Gerade $x = x_k$, $y = y_k$ die Fläche S in zwei Punkten trifft. Derjenige dieser beiden Punkte, dessen z-Koordinate den größeren Wert hat, heiße $\sigma_k = (x_k, y_k, z')$ Sein Spiegelbild in bezug auf die Ebene $z = z_k$, nämlich der Punkt $\boldsymbol{p}_k = (x_k, y_k, 2z_k - z')$ liegt gewiß im Innern von T. Nach (24) müßte in abgekürzter Schreibweise $U(\boldsymbol{p}_k) \leqq U(\sigma_k)$, mithin auch $V(\boldsymbol{p}_k) \leqq V(\sigma_k)$ sein. Dies führt aber zu einem Widerspruch. In der Tat hat das Potential von $\Theta + \overline{\Theta}$ in $\boldsymbol{p}_k$ und σ_k den gleichen Wert. Das Potential des Körpers $T - (\Theta + \overline{\Theta})$ ist indessen in $\boldsymbol{p}_k$ größer als in σ_k, weil dies bereits für jedes seiner Elemente gilt. Es muß darum $U(\boldsymbol{p}_k) > U(\sigma_k)$, mithin gewiß

$$(25) \qquad \omega^2 < 2\pi\varkappa f$$

sein (vgl. loc. cit. [17] S. 1129—1130).

Ist der Wert der Dichte in ${}_jT$ $(j = 1, \ldots, q)$ nicht überall derselbe, so führt die gleiche Überlegung sinngemäß zu der Folgerung

$$(26) \qquad \omega^2 < 2\pi\varkappa f_{\text{Min}}.$$

Es ist weiter nicht schwer zu zeigen, daß *die Schwerkraft nur in den Punkten der Symmetrieebene $z = 0$ verschwinden kann.*

Es sei (x', y', z') irgendein Punkt auf S, und es sei etwa $z' > 0$. Der oberhalb der Ebene $z = z'$ gelegene Teil von T sei Θ', sein Spiegelbild in bezug auf die Ebene $z = z'$ heiße $\overline{\Theta}'$. (Ist $z' = z_{\text{Max}}$, so verschwindet Θ'.) Die Komponente der Anziehungskraft des Körpers $\Theta' + \overline{\Theta}'$ im Punkte (x', y', z') in der Richtung der z-Achse ist aus Gründen der Symmetrie gleich Null, die in der gleichen Richtung genommene Komponente der Anziehung des Körpers $T - \Theta' - \overline{\Theta}'$ ist hingegen sicher < 0, da dies bereits für jedes seiner Elemente gilt. Es gilt demnach $\frac{\partial}{\partial z} V(x', y', z') < 0$, mithin auch

$$\frac{\partial}{\partial z} U(x', y', z') < 0,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist (vgl. loc. cit. [17] S. 1130).

Für konvexe, demnach aus einem einzigen einfach zusammenhängenden Körper bestehende Gleichgewichtsfiguren, die überdies so beschaffen sind, daß die Schwerkraft auf S nicht verschwindet, bewies Crudeli[25] die schärfere Ungleichheit

$$\omega^2 < \pi \varkappa f.$$

Nach W. Nikliborc[26] gilt die gleiche Schranke für jede Gleichgewichtsfigur T, die, wie eingangs vorausgesetzt, auch aus mehreren Einzelmassen ${}_jT$ ($j = 1, \ldots, q$) bestehen kann, die übrigens Punkte des Randes gemeinsam haben dürfen, sofern nur die ${}_jS$ ($j = 1, \ldots, q$) den folgenden Regularitätsannahmen genügen:

Wie wir wissen, hat ${}_jS$ überall außer höchstens auf der Symmetrieebene eine stetige Normale. Konvergiert ein auf S etwa oberhalb der Symmetrieebene gelegener Punkt gegen einen beliebigen Punkt der Ebene $z = 0$, so konvergiert, wie Nikliborc ferner voraussetzt, die Flächennormale ν gegen eine bestimmte Richtung. Darüber hinaus macht Nikliborc die Annahme, daß der Schnitt von ${}_jS$ ($j = 1, \ldots, q$) mit der Ebene $z = 0$ eine Kurve mit stetiger, allenfalls abteilungsweise stetiger Normale (ohne Spitzen) darstellt. Sind allgemeiner die Werte f_j nicht alle einander gleich, so muß

$$\omega^2 < \pi \varkappa f_{\mathrm{Min}}$$

sein. Auch diesmal ist es übrigens gleichgültig, ob der Außendruck gleich Null ist oder einen beliebigen positiven Wert hat.

Die Überlegungen von Nikliborc, die von der Poincaréschen Schranke (25) Gebrauch machen, unterscheiden sich nur in einigen wenigen Punkten von denjenigen von Crudeli.

Es möge jetzt eine der Flüssigkeitsmassen unserer Konfiguration, etwa ${}_jT$, der Klasse $A\,h$ angehören. Wie sich leicht zeigen läßt, ist die *Schwerkraft auf* ${}_jS$ *überall nach innen gerichtet.*

Es sei $G_j(x, y, z; x', y', z')$ die zu ${}_jT$ gehörige, auf ${}_jS$ verschwindende (klassische) Greensche Funktion der Potentialtheorie. Sie hat, als Funktion von (x', y', z') aufgefaßt, bei festgehaltenem (x, y, z) im Innern von T, auf S_j stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, insbesondere die stetige Normalableitung $\frac{\partial}{\partial \nu'} G_j(x, y, z; \sigma')$. Ferner ist

$$\frac{\partial}{\partial \nu'} G_j(x, y, z; \sigma') = \frac{\partial}{\partial \nu'} G_j(\sigma'; x, y, z) > 0. \tag{27}$$

In (27) bezeichnet σ' einen Punkt auf ${}_jS$, (ν') die Innennormale

---

[25] Vgl. U. Crudeli, Nuovo limite superiore delle velocità angolari dei fluidi omogenei, rotanti uniformemente, limitati da figura di equilibrio, Atti dei Lincei **19** (1910), S. 666—668.

[26] Vgl. W. Nikliborc, Über die obere Schranke der Winkelgeschwindigkeit der Gleichgewichtsfiguren rotierender, homogener Flüssigkeiten, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 787—793.

zu ${}_jS$ in σ'. (Vgl. L. Lichtenstein, Über eine Eigenschaft der klassischen Greenschen Funktion, Math. Zeitschr. **11** (1921), S. 319—320.)

Es gilt nun wegen (21)

$$U(x, y, z) = {}_jU_0 - \frac{1}{4\pi}\int_{jT} G_j(x, y, z; x', y', z')\,(2\,\omega^2 - 4\,\pi\varkappa f)\,dx'\,dy'\,dz', \tag{28}$$

somit im Punkte σ auf ${}_jS$

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} = -\frac{1}{4\pi}\int_{jT} \frac{\partial}{\partial \nu} G_j(\sigma; x', y', z')\,(2\,\omega^2 - 4\,\pi\varkappa f)\,dx'\,dy'\,dz'. \tag{29}$$

Wegen (27) ist augenscheinlich, wie behauptet, $\frac{\partial U}{\partial \nu} > 0$. Besteht T aus einer endlichen Anzahl von Flüssigkeitsmassen, deren jede von einer Fläche der Klasse $A\,h$ begrenzt ist, so liegen, da die Schwerkraft auf S nirgends verschwindet, die Massen völlig getrennt. Wie früher einmal bemerkt, sind nunmehr alle ${}_jS$ stetig gekrümmt. Ja, die auf S. 11 eingeführten Funktionen $z(x, y)$ haben sogar stetige Ableitungen aller Ordnungen.

Der Satz gilt unverändert, auch wenn nicht alle f_j einander gleich sind. Jetzt ist nämlich in (29) der Klammerausdruck durch $2\omega^2 - 4\,\pi\,\varkappa\,f_j$ zu ersetzen, und mit $\omega^2 < 2\,\pi\,\varkappa\,f_{\text{Min}}$ erhalten wir wieder $\frac{\partial U}{\partial \nu} > 0$.

Es sei wieder einmal T wie eingangs vorausgesetzt beschaffen, demnach insbesondere $f_1 = \ldots = f_a = f$. Es sei v das Gesamtvolumen der Flüssigkeit, ω die Winkelgeschwindigkeit. *Für die Entfernung $\mathfrak{r}$ der Punkte des Körpers von der Rotationsachse läßt sich eine nur von v, f und ω abhängige Schranke angeben.*

Vor allem ist, unter (l) eine beliebige Richtung verstanden,

$$\frac{\partial V}{\partial l} = f\int_T \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r}\right) dx'\,dy'\,dz', \quad \text{somit}$$

$$\left|\frac{\partial V}{\partial l}\right| < f\int_T \frac{1}{r^2}\,dx'\,dy'\,dz' \leqq 4\pi\,f\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{30}$$ [27]

Es sei B ein Punkt auf S, in dem $\mathfrak{r}^2 = x^2 + y^2$ seinen Höchstwert erreicht. Offenbar liegt B auf der Symmetrieebene $z = 0$. Die Schwerkraft in B ist in das Innere von T gerichtet oder gleich Null. Die Zentrifugalkraft in B ist darum gewiß nicht größer als die Anziehungskraft. Also ist

$$\omega^2\,\mathfrak{r} \leqq \varkappa\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqq 4\pi\,f\,\varkappa\left(\frac{3\,v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \text{mithin}$$

$$\mathfrak{r} < 4\pi\,\frac{f\varkappa}{\omega^2}\left(\frac{3\,v}{4\,\pi}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{31}$$

---

[27] Vgl. E. Schmidt, Bemerkungen zur Potentialtheorie, Schwarz-Festschrift, Berlin 1914, S. 365—383, insb. S. 368.

Daß sich auch für die z-Koordinate der Punkte von T eine Schranke angeben läßt, hat zuerst Mazurkiewicz gezeigt. Der von ihm gefundene Wert ist sehr groß. Für Rotationsfiguren vom topologischen Typus einer Kugel, welche darüber hinaus die Eigenschaft haben, daß die Meridiankurve im Halbraume $z > 0$ monoton verläuft, fand Nikliborc

$$\text{Max}\, z < 10\, \text{Max}\, \mathfrak{r}. \tag{32}$$ [28]

In einer späteren Arbeit [Über die Abplattung der homogenen Gleichgewichtsfiguren gravitierender Flüssigkeiten II., Math. Zeitschr. **36** (1933), S. 655—676] beweist Nikliborc darüber hinaus, daß, wenn die z-Koordinate, als Ortsfunktion auf S aufgefaßt, ihr Maximum in einem Punkte der z-Achse erreicht, gewiß $\frac{\text{Max}\, z}{\text{Max}\, \mathfrak{r}} < 5$ ist. Irgendwelche weitere Voraussetzungen bezüglich S brauchen dabei nicht gemacht zu werden. Übrigens gilt das vorstehende Ergebnis nach Nikliborc auch für alle Rotationsfiguren vom Kugeltypus.

5. Nichthomogene Flüssigkeiten. Wir gehen jetzt zu dem allgemeineren Falle nichthomogener Gleichgewichtsfiguren über und bemerken vor allem, daß, wie sich durch eine wortgetreue Übertragung der auf S. 12 durchgeführten Überlegungen zeigen läßt, auch jetzt der Schwerpunkt auf der Rotationsachse liegen muß.

Wie in dem Vorstehenden bereits gelegentlich bemerkt, gilt der Satz von der Existenz einer Symmetrieebene unter geeigneten Voraussetzungen, auch wenn es sich um eine Gleichgewichtsfigur einer rotierenden nichthomogenen gravitierenden Flüssigkeit handelt[29]. Dies wollen wir jetzt beweisen und legen unseren Betrachtungen die folgenden Voraussetzungen zugrunde.

Der von der Flüssigkeit erfüllte Raumteil T besteht aus einer endlichen Anzahl beschränkter Gebiete ${}_jT$, die Punkte des Randes gemeinsam haben können. Die Berandung ${}_jS$ eines jeden dieser Gebiete besteht aus einer einfach oder zweifach zusammenhängenden geschlossenen, doppelpunktlosen, stetigen Fläche von dem topologischen Typus einer Kugel bzw. einer Torusfläche; alle ${}_jT$ haben ein bestimmtes Volumen im Sinne von Peano und Jordan. Die Dichte der Flüssigkeit f ist eine stetige, allenfalls abteilungsweise stetige Funktion des Ortes. Im

---

[28] Vgl. W. Nikliborc, Über die Abplattung der homogenen Gleichgewichtsfiguren rotierender, gravitierender Flüssigkeiten, Math. Zeitschr. **34** (1931), S. 74 bis 90. In einer vorausgegangenen Arbeit, Ein Satz über die Winkelgeschwindigkeit der Gleichgewichtsfiguren rotierender, gravitierender Flüssigkeiten, Math. Zeitschr. **31** (1929), S. 366—377 beweist Nikliborc u. a., daß ω mit der Abplattung $\frac{\text{Max}\, z}{\text{Max}\, \mathfrak{r}}$ gegen Null konvergiert.

[29] Vgl. L. Lichtenstein, Über eine Eigenschaft der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen, Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 635—640. Die Betrachtungen des Textes bilden eine weiter gefaßte Darstellung der Entwicklungen dieser Note.

letzteren Falle läßt sich T in eine endliche Anzahl Raumteile zerfällen, so daß in jedem einzelnen die Dichte durchaus stetig ist. Es sei $f_* = \mathrm{Min}\, f$, $f^* = \mathrm{Max}\, f$, $f_* \leqq f_1 \leqq f^*$, und es möge $\mathfrak{M}_{f_1}$ die Menge der Punkte in T mit der Dichte $\geqq f_1$ bezeichnen. Offenbar ist $\mathfrak{M}_{f_*} = T$. Wir nehmen an, daß $\mathfrak{M}_{f_1}$ ganz wie T beschaffen ist; also nimmt, wie man sich leicht überzeugt, die Dichte von außen nach innen nicht ab. Ist $f_2 > f_1$, so ist $\mathfrak{M}_{f_2}$ gewiß in $\mathfrak{M}_{f_1}$ enthalten. Ist $\mathfrak{M}_{f_2} = \mathfrak{M}_{f_1}$, so sind die Werte der Dichte in dem offenen Intervall (f_1, f_2) in T nicht vertreten, die Dichte ist abteilungsweise stetig. In einem oder mehreren jeweils von zwei wie ${}_3S$ beschaffenen Flächen begrenzten Gebieten in T, denen demnach ein bestimmtes Volumen zukommt, und die keinen Punkt miteinander gemeinsam haben, kann die Dichte einen konstanten Wert haben. Ist f_1 einer dieser Werte, so ist $\mathfrak{M}_{f_1} \succ \lim\limits_{f_2 \to f_1} \mathfrak{M}_{f_2}$ $(f_2 > f_1)$. Die Menge $\mathfrak{M}_{f^*}$ kann ein oder mehrere Homogenitätsgebiete bilden oder sich auf einzelne Punkte oder geschlossene Linien reduzieren. Schließlich wird zunächst wie auf S. 10 angenommen, daß die Flüssigkeit und mit ihr zugleich das Achsenkreuz um die z-Achse wie ein starrer Körper gleichförmig rotieren. Der Außendruck wird gleich Null vorausgesetzt. Es sei ω die Winkelgeschwindigkeit,

$$\varkappa V(x, y, z) = \varkappa \int\limits_T f' \frac{d\tau'}{r} \tag{33}$$

das Gravitationspotential,

$$U(x, y, z) = \varkappa V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \tag{34}$$

das Gesamtpotential der Einheitskräfte. Die für das (relative) Gleichgewicht notwendigen und hinreichenden Bedingungen sind: 1. Der Ausdruck (34) hat auf jeder Fläche gleicher Dichte, die nicht zu einem Homogenitätsgebiete gehört, in den Homogenitätsgebieten auf jeder Komponente ihrer Berandung einen konstanten Wert. 2. Der Druck p ist in T überall > 0. Als Grenzfall kann immerhin in einzelnen Punkten, Linien oder Flächenstücken p verschwinden.

Es sei S_f die Gesamtbegrenzung von $\mathfrak{M}_f \equiv T_f$, und es möge Σ_f die Gesamtheit der Mittelpunkte aller zur Rotationsachse parallelen Sehnen von S_f $(f_* \leqq f \leqq f^*)$ bezeichnen. Wir nehmen (vgl. S. 12) an, daß Σ_f aus einer endlichen oder abzählbar unendlichen Anzahl zweidimensionaler Kontinuen besteht. Liegen nicht alle Σ_f auf einer und derselben Ebene, so gibt es mindestens einen in T oder auf S gelegenen Punkt $Q_0(x_0, y_0, z_0)$, der so beschaffen ist, daß z_0 die obere Grenze aller in Betracht kommenden z-Koordinaten ist und es Sehnen gibt, deren Mittelpunkt z-Koordinate hat, die um beliebig wenig kleiner als z_0 ist.

Es möge (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ... irgendeine gegen (x_0, y_0, z_0) konvergierende Folge von Sehnenmittelpunkten bezeichnen. Ihre Endpunkte mögen entsprechend $(x_n, y_n, z_n^{(1)})$ und $(x_n, y_n, z_n^{(2)})$ $(z_n^{(2)} > z_n^{(1)})$

$(n=1, 2, \ldots)$ heißen. Die Dichte in den beiden Punkten hat allemal den gleichen Wert, sie heiße f_n. Indem wir nötigenfalls von der Folge (x_n, y_n, z_n) zu einer geeigneten Teilfolge $(x_{n_k}, y_{n_k}, z_{n_k})$ $(k=1, 2, \ldots)$ übergehen, können wir erreichen, daß $(x_{n_k}, y_{n_k}, z_{n_k}^{(1)})$ und $(x_{n_k}, y_{n_k}, z_{n_k}^{(2)})$ für $k \to \infty$ etwa gegen $(x_0, y_0, z_0^{(1)})$ und $(x_0, y_0, z_0^{(2)})$ konvergieren. Zur Vereinfachung möge die neue Folge wieder mit (x_n, y_n, z_n) bezeichnet werden. Jetzt ist also

$$\lim_{n\to\infty} z_n^{(1)} = z_0^{(1)}, \qquad \lim_{n\to\infty} z_n^{(2)} = z_0^{(2)}, \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = z_0.$$

Ist $z_0^{(1)} = z_0$, so ist augenscheinlich auch $z_0^{(2)} = z_0$. Sonst ist $z_0^{(2)} - z_0 = z_0 - z_0^{(1)} > 0$, und die Dichte hat in $z_0^{(1)}$ und $z_0^{(2)}$ den gleichen Wert, etwa f_0; z_0 selbst ist der Mittelpunkt einer Sehne. Dieser Fall liegt gewiß vor, wenn (x_0, y_0, z_0) in das Innere eines Homogenitätsgebietes fällt. Offenbar kann S_{f_0} von der Geraden $x = x_0$, $y = y_0$ auch noch in Punkten getroffen werden, deren z-Koordinate $< z_0^{(1)}$ ist, keinesfalls aber auch noch in einem Punkte, dessen Abstand von der x-y-Ebene $> z_0^{(2)}$ wäre. Der zuerst erwähnte Fall $z_0^{(1)} = z_0^{(2)} = z_0$, somit z_0 auf S_{f_0}, kann, wie wir sogleich zeigen werden, nicht auftreten, wenn $f_0 < f^*$ ist, die Schwerkraft in Q_0 nicht verschwindet und die Gerade $x = x_0$, $y = y_0$ die Fläche S_{f_0}, die, wie wir wissen, in Q_0 und seiner Umgebung nunmehr eine stetige Normale hat[30], nicht berührt.

Es möge die Normale in Q_0 mit der z-Achse einen von $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Winkel einschließen. Grenzt S_{f_0} in (x_0, y_0, z_0) nicht (einseitig) an ein Homogenitätsgebiet an, so ändert sich die Dichte in einer Umgebung des Punktes (x_0, y_0, z_0) in der Richtung der z-Achse monoton, und es läßt sich augenscheinlich für $z_n^{(2)} - z_n^{(1)}$ eine positive untere Schranke angeben. Zu demselben Resultat gelangt man, wenn S_{f_0} in der Umgebung von Q_0 an ein Homogenitätsgebiet (einseitig) angrenzt. Ist also die Schwerkraft in Q_0 von Null verschieden, so muß $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$ sein. Ist aber in (x_0, y_0, z_0) die Schwerkraft gleich Null, so gilt

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \tag{35}$$

In beiden Fällen ist demnach $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$, mithin auch $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$. Die vorstehenden Überlegungen gelten sinngemäß auch in dem Grenzfall $f_0 = f^*$, wenn $\mathfrak{M}_{f^*}$ Gebiete enthält und (x_0, y_0, z_0) dem Rande von $\mathfrak{M}_{f^*}$ angehört. Fällt aber (x_0, y_0, z_0) in einen isolierten Punkt, oder ein isoliertes Linienstück von $\mathfrak{M}_{f^*}$ hinein, so wird (35) gewiß in Q_0 erfüllt sein, sonst würde

[30] Vgl. oben S. 11. Dort handelt es sich um eine homogene Flüssigkeit, doch gelten jene Entwicklungen ohne jede Änderung auch in dem jetzt betrachteten allgemeineren Falle.

die Gleichung $U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0)$ ein Flächenstück definieren, das in Q_0 und einer Umgebung dieses Punktes eine stetige Normale hätte, und Q_0 hätte nicht die vorausgesetzte singuläre Lage.

Entweder ist also (x_0, y_0, z_0) Mittelpunkt einer Sehne von S_{f_0}, oder es ist in (x_0, y_0, z_0) gewiß $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$. Beide Annahmen führen zu einem Widerspruch. Dies läßt sich, wie wir sogleich zeigen werden, durch eine sinngemäße Erweiterung der vorhin in dem speziellen Falle homogener Flüssigkeiten durchgeführten Überlegungen erweisen.

Wie man leicht sieht, ist

$$V(x_0, y_0, z_0) = f_* \int_T \frac{d\tau}{r} + \int_{f_*}^{f^*} df \int_{T_f} \frac{d\tau}{r}, \quad r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-x_0)^2, \tag{36}$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial z_0} V(x_0, y_0, z_0) = f_* \int_T \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau + \int_{f_*}^{f^*} df \int_{T_f} \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau. \tag{37}$$

Es seien D_f bzw. D Projektionen von S_f bzw. S auf die Ebene $z = 0$. Es gilt dann

$$\int_{T_f} \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau = \int_{D_f} dx\, dy \int \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{1}{r}\right) dz = -\int_{D_f} dx\, dy \int \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dz, \tag{38}$$

die Integration nach z über alle Intervalle $z' \leqq z \leqq z''$, welche die Parallele zu der z-Achse durch den Punkt (x, y) in D_f mit T_f gemeinsam hat, erstreckt gedacht. Das über D_f erstreckte Integral ist im allgemeinen als ein Integral im Lebesgueschen Sinne aufzufassen.

Es gilt jetzt weiter in ausführlicherer Schreibweise wie auf S 14.

$$\int_{T_f} \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau = -\int_{D_f} dx\, dy \sum \left(\frac{1}{r(z_0, z'')} - \frac{1}{r(z_0, z')}\right), \tag{39}$$

$$\int_T \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau = -\int_D dx\, dy \sum \left(\frac{1}{r(z_0, z'')} - \frac{1}{r(z_0, z')}\right). \tag{40}$$

Beachtet man, daß z_0 die obere Grenze der Mittelpunkte der wiederholt genannten vertikalen Sehnen bildet und es Sehnen gibt, deren Mittelpunkt tiefer als z_0 liegt, so sieht man, daß die Integralausdrücke (39) und (40) $\leqq 0$ sind und das Zeichen $<$ tatsächlich auftritt. Aus (37), (39) und (40) folgt nunmehr, wie man leicht sieht, $\frac{\partial}{\partial z_0} V(x_0, y_0, z_0) < 0$. Aus Gründen der Stetigkeit kann es nämlich nicht vorkommen, daß die Sehnen, denen in (39) und (40) das Zeichen $<$ entspricht, zu (37) insgesamt den Beitrag Null liefern. Wir sind zu einem Widerspruch ge-

langt. In einer ganz ähnlichen Weise läßt sich in Nachbildung der auf S. 13 geführten Überlegungen zeigen, daß auch der andere noch mögliche Fall auf einen Widerspruch führt. Damit ist unser Beweis zu Ende. *Es gibt eine auf der Rotationsachse senkrechte Symmetrieebene.* Sie enthält augenscheinlich den Schwerpunkt. Die Rotationsachse ist eine Hauptträgheitsachse des Systems. Durch die vorstehenden Überlegungen ist des weiteren gezeigt, daß S_f mit keiner Parallelen zu der z-Achse mehr als zwei Punkte gemeinsam haben kann[31]. Besteht die Flüssigkeit aus mehreren Einzelmassen, so liegen diese nebeneinander, nicht übereinander. Dies besagt, daß keine zu der z-Achse parallele Gerade mehr als eine Flüssigkeitsmasse trifft.

Es möge sich insbesondere um eine wie vorhin beschaffene Flüssigkeitskonfiguration im Ruhezustande handeln. Jetzt kann jede durch den Schwerpunkt hindurchgehende Gerade als Rotationsachse aufgefaßt werden. Kein (beliebig gerichteter) Strahl kann S_f in mehr als zwei Punkten treffen; T_f bilden eine Schar ineinander geschachtelter, von einer einzigen konvexen Fläche S_f begrenzter Gebiete. Jede den Schwerpunkt enthaltende Ebene ist eine Symmetrieebene des Systems. Damit ist bewiesen, *daß jede Gleichgewichtsfigur, die unsere Voraussetzungen erfüllt und dem Ruhezustande der Flüssigkeit entspricht, aus einem System konzentrischer Kugelschalen besteht.*

Wir kehren jetzt zu rotierenden, wie vorhin (S. 22—23) beschaffenen nichthomogenen Flüssigkeiten zurück und beweisen, daß, wie in dem besonderen Falle einer homogenen Flüssigkeit (S. 19), *die Schwerkraft nur in den Punkten der Symmetrieebene verschwinden kann*[32]. Es sei $(\bar{x}, y, \bar{z})$ irgendein Punkt in T oder auf S, und es möge etwa $\bar{z} > 0$ sein. Es sei $\tilde{f}$ der größte Wert der Dichte mit der Eigenschaft, daß T_f für $f < \tilde{f}$ Punkte enthält, deren z-Koordinate $> \bar{z}$ ist. Der oberhalb der Ebene $z = \bar{z}$ gelegene Teil des Körpers T_f $(f < \tilde{f})$ heiße Θ_f, sein Spiegelbild in bezug auf diese Ebene heiße Θ'_f. Die Komponente der Anziehungskraft des Körpers $\Theta_f + \Theta'_f$, den wir uns vorübergehend mit homogener Masse der Dichte 1 erfüllt denken, im Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ in der Richtung der z-Achse ist aus Symmetriegründen gleich Null. Die in gleicher Richtung genommene Komponente der Anziehung des Körpers $T_f - \Theta_f - \Theta'_f$ (die Dichte wieder $=1$ gesetzt) ist hingegen sicher <0, weil dies bereits für jedes ihrer Elemente zutrifft. Dies gilt alles für $f < \tilde{f}$. Ist aber $f \geqq \tilde{f}$, so hat, wie man sofort sieht, die Anziehung des Körpers T_f gewiß eine nicht verschwindende Kom-

[31] Übrigens auch nicht streckenweise zusammenfällt. Im letzteren Fall wäre in gewissen oberhalb der Symmetrieebene gelegenen Punkten $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$, was nicht angeht.

[32] Vgl. L. Lichtenstein, Astronomie und Mathematik in ihrer Wechselwirkung, Leipzig 1923, S. 72—73.

ponente in der Richtung abnehmender z. Aus der Formel (37), in der diesmal (x_0, y_0, z_0) durch $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ zu ersetzen ist, folgt nunmehr ohne weiteres, daß die Schwerkraft in der Tat nur in den Punkten der Symmetrieebene verschwinden kann. Offenbar ist $U(x, y, z)$, als Funktion von z aufgefaßt, für $z > 0$ monoton abnehmend. Ist die Dichte, wie vorhin vorausgesetzt, stetig, allenfalls abteilungsweise stetig, so sind die Niveauflächen $U(x, y, z) = \varkappa V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{Const.}$, da $V(x, y, z)$ gewiß stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung hat, für $z \neq 0$ jedenfalls Flächen der Klasse Ah. Singularitäten (Kanten, körperliche Ecken, konische Punkte), in denen die Schwerkraft verschwinden muß, können nur in der Symmetrieebene in T oder auf S vorkommen.

Wie Herr Wavre zuerst bemerkt hatte, gilt der vorstehende Satz ohne jede Änderung, auch wenn es sich um eine in stationärer Bewegung begriffene, topologisch wie vorhin beschaffene Masse einer nichthomogenen Flüssigkeit handelt, deren Teilchen um die z-Achse gleichförmig rotieren, sofern die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega(\mathfrak{r}^2)$ $(\mathfrak{r}^2 = x^2 + y^2)$ gesetzt werden kann[33].

Für (34) tritt diesmal

$$U(x, y, z) = \varkappa V(x, y, z) + \Phi(\mathfrak{r}^2) \tag{41}$$

ein.

Kehren wir noch für einen Augenblick zu einem wie ein starrer Körper rotierenden nichthomogenen Flüssigkeitskörper T zurück und machen bezüglich der Dichte, außer den vorhin getroffenen Festsetzungen, noch die weitere Annahme, f möge in jedem Stetigkeitsbereich einer Hölderschen Bedingung genügen. Geht man die Betrachtungen auf S. 18 noch einmal aufmerksam durch, so findet man, daß für $\omega^2 > 2\pi\varkappa f_{\text{Max}}$ in der Flüssigkeit durchweg Zugspannungen herrschen. Gewiß muß also darum $\omega^2 \leqq 2\pi\varkappa f_{\text{Max}}$ sein. Diese Bedingung genügt freilich noch nicht dafür, daß in T überall sich $p \geqq 0$ ergibt. Dies trifft, wie man sich leicht überzeugt, gewiß zu, wenn $\omega^2 < 2\pi\varkappa f_{\text{Min}}$ gilt.

Nach Crudeli und Nikliborc muß

$$\omega^2 \leqq \pi\varkappa f_{\text{Max}} \tag{42}$$

sein[34]. Besteht T aus mehreren Einzelmassen, so kann man dafür schärfer

$$\omega^2 \leqq \text{Min}\, \pi\varkappa f_{\text{Max}} \tag{43}$$

[33] Vgl. R. Wavre, loc. cit. [21] S. 35—39. Wie vorhin (S. 15) bemerkt, hat die Flüssigkeitskonfiguration diesmal Rotationssymmetrie um die z-Achse.

[34] Vgl. U. Crudeli, Su la velocità angolare dei fluidi eterogenei, rotanti, limitati da figura di equilibrio, Atti della Acc. dei Lincei **19** (1910), 2, S. 41—43; W. Nikliborc, loc. cit. [26], S. 793.

setzen, wo diesmal unter f_{Max} der Höchstwert der Dichte in einer Einzelmasse verstanden wird.

Und nun zum Schluß eine isoperimetrische Eigenschaft der Gleichgewichtsverteilung.

Unter allen von einer endlichen Anzahl Stücke analytischer und regulärer Flächen begrenzten einfach zusammenhängenden Körpern T gleichen Volumens ist der Kugelkörper dadurch ausgezeichnet, daß für diesen das Integral

$$\int_T\int_T \frac{1}{r}\,d\tau\,d\tau' \qquad (r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2) \tag{44}$$

den größten Wert annimmt. — Denkt man sich die betrachteten Körper gleichen Volumens mit homogener, der Newtonschen Anziehung unterworfener, ruhender Masse erfüllt, so besagt der vorstehende Satz, daß dem Kugelkörper das absolute Minimum der Energie

$$-f^2\int_T\int_T \frac{1}{r}\,d\tau\,d\tau' \tag{45}$$

entspricht. Dieser zuerst von Liapounoff bewiesene Satz ist später in Anlehnung an gewisse Resultate von Blaschke in einer sehr einfachen Weise von T. Carleman bewiesen worden[35].

Eine analoge Minimumeigenschaft gilt auch für *nichthomogene* Flüssigkeiten.

Es sei T irgendeine Verteilung nichthomogener Flüssigkeit von der vorhin (S. 22—23) betrachteten Art, und es möge diesmal der Einfachheit halber S_f allemal aus einer endlichen Anzahl Stücke analytischer und regulärer Flächen bestehen. Unter allen Konfigurationen T, die überdies so beschaffen sind, daß die Volumina aller Raumteile T_f vorgeschriebene Werte haben, ist die besondere Verteilung, bei der die Körper T_f sämtlich konzentrische Kugeln sind, dadurch ausgezeichnet, daß ihr das Minimum der Energie

$$-\int_T\int_T \frac{ff'}{r}\,d\tau\,d\tau'$$

entspricht[36].

---

[35] Vgl. W. Blaschke, loc. cit. [18], T. Carleman, loc. cit. [18]. Der Einfachheit halber wird hier die Begrenzung der Vergleichskörper als „abteilungsweise analytisch" angenommen. Der Satz gilt selbst unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen. Man vergleiche die vorgenannte Arbeit von Carleman und die die klassische isoperimetrische Eigenschaft der Kugel betreffende Abhandlung von W. Groß, Die Minimaleigenschaft der Kugel, Monatshefte f. Math. und Physik **28** (1917), S. 77 bis 97.

[36] Vgl. L. Lichtenstein, Über eine isoperimetrische Aufgabe der mathematischen Physik, Math. Zeitschr. **3** (1919), S. 8—10.

Drittes Kapitel.

Neue Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft einer gegebenen Gleichgewichtsfigur. Homogene Flüssigkeiten.

6. Geschichtliches. Wie wir wissen (vgl. **3**), zweigt von einem ganz bestimmten zu dem Werte ω' der Winkelgeschwindigkeit gehörigen Maclaurinschen Ellipsoide die lineare Reihe Jacobischer Ellipsoide ab. Es liegt nun die Frage nahe, ob es nicht auch andere Maclaurinsche Ellipsoide gibt, in deren Nachbarschaft neue von den Rotationsellipsoiden verschiedene homogene Gleichgewichtsfiguren existieren. Ein ganz analoges Problem kann man bezüglich der linearen Reihe der Jacobischen Ellipsoide stellen.

Einem Bericht von Liapounoff (vgl. loc. cit. [39] a) S. 1) zufolge war es wohl Tschebyscheff, der als erster Probleme dieser Art ins Auge faßte. Insbesondere fesselte sein Interesse die konkrete Frage, ob es in der Nachbarschaft desjenigen Rotationsellipsoids, das zu dem Höchstwert ω'' der Winkelgeschwindigkeit gehört, neue, womöglich zu einem Werte $\omega > \omega''$ der Winkelgeschwindigkeit gehörige Gleichgewichtsfiguren gibt. Er legte sie verschiedenen russischen Mathematikern, darunter auch Liapounoff vor. In seiner im Jahre 1884 erschienenen, in russischer Sprache abgefaßten Dissertation, Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation[37], zeigt Liapounoff, daß einer jeden natürlichen Zahl $n > 2$ $E\left(\frac{n}{2}\right) + 2$ algebraische Flächen von der Ordnung n zugeordnet werden können, die in erster Approximation die bekannten Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Eine von diesen angenäherten Gleichgewichtsfiguren liegt in der Nachbarschaft eines Jacobischen Ellipsoids, die übrigen sind gewissen Maclaurinschen Ellipsoiden benachbart. Natürlich können aus der Betrachtung einer ersten Näherung keinerlei bündige Schlüsse auf die Existenz neuer nichtellipsoidaler Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Flüssigkeitsellipsoide gezogen werden. Und so brachte weder die bekannte, zwei Jahre nach dem Erscheinen der ersten Untersuchungen von Liapounoff veröffentlichte Abhandlung von Poincaré[38], in der

[37] Diese Abhandlung ist später in französischer, von Davaux besorgter Übersetzung in den Annales de Toulouse (2) **6** (1904), S. 5—116 erschienen.

[38] Vgl. H. Poincaré, Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, Acta Mathematica **7** (1885), S. 259—352, erschienen 1886, sowie die dieser Hauptarbeit vorausgegangenen Noten Comptes rendus **100** (1885), S. 1068 bis 1070 und Comptes rendus **101** (1885), S. 307—309.

ebenfalls nur mit der ersten Annäherung operiert wird, noch dessen spätere Schrift, Sur la stabilité des figures pyriformes affectées par une masse fluide en rotation, Philosophical Transactions (A, Bd. 198 (1902), S. 333—373), in der eine zweite Näherung herangezogen wird, einen wirklichen Beweis der Existenz der fraglichen Gleichgewichtsfiguren. — Das Problem blieb zwanzig Jahre in der Schwebe, und erst die im Jahre 1903 wieder einsetzenden umfangreichen Veröffentlichungen von Liapounoff brachten die Entscheidung. Sie enthalten nicht allein einen strengen Existenzbeweis der wiederholt genannten Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Flüssigkeitsellipsoide, sondern darüber hinaus auch noch die Beantwortung verschiedener Fragen, die mit der Stabilität sowohl der Flüssigkeitsellipsoide selbst als auch der von ihnen abzweigenden neuen Flüssigkeitsgestalten zusammenhängen[39 40].

Wir werden uns weiter unten mit der allgemeineren Frage der Existenz neuer homogener oder nichthomogener Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft einer gegebenen homogenen oder heterogenen Gleichgewichtsfigur beschäftigen und dem Existenzbeweis ein allgemein gültiges Verfahren der sukzessiven Approximationen zugrunde legen. In dem unmittelbar Folgenden wollen wir in aller Kürze die Methode und die Ergebnisse von Liapounoff, soweit sie die Existenz homogener Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Flüssigkeitsellipsoide betreffen, skizzieren. Auf heterogene Flüssigkeitskörper werden wir weiter unten zu sprechen kommen. Wir schließen uns in dem, was folgt, an die Bezeichnungsweise von Liapounoff an.

Es möge sich um eine in gleichförmiger Rotation mit der

[39] Vgl. A. Liapounoff, a) Sur un problème de Tschébycheff, Mém. de l'acad. des sciences de Pétersbourg **17** (8. Reihe), Nr. 3 (1905), S. 1—31; b) Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène, douée d'un mouvement de rotation. I^{ère} partie, Étude générale du problème (1906), S. 1—225; c) II^{ième} partie, Figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes de Maclaurin (1909), S. 1—202; d) III^{ième} partie, Figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes de Jacobi (1912), S. 1—227; e) IV^{ième} partie, Nouvelles formules pour la recherche des figures d'équilibre (1914), S. 1—112.

[40] Den in [39] genannten Arbeiten sind die beiden Abhandlungen a) Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes, Mém. de l'acad. des sciences de Pétersbourg **14** (8. Reihe) Nr. 7 (1903), S. 1—37, und b) Sur l'équation de Clairaut et les équations plus générales de la théorie de la figure des planètes, **15** (8. Reihe) Nr. 10 (1904), S. 1—66 vorangegangen. Sie beschäftigen sich mit der Figur der Erde, betreffen demnach eine nichthomogene Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeiten. Der in Aussicht genommene Konvergenzbeweis ist a. a. O. zum Teil nur angedeutet. Die beiden nach dem Tode von Liapounoff veröffentlichten Arbeiten, Sur certaines séries de figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation, I^{ère} partie, Académie des sciences de l'Union des RSS. 1925, S. 1—224; II^{ième} partie, ebenda 1927, S. 225—441 beschäftigen sich mit nichthomogenen Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Flüssigkeitsellipsoide. Die Schwankung der Flüssigkeitsdichte liegt dabei unterhalb einer gewissen hinreichend kleinen Schranke.

Winkelgeschwindigkeit ω begriffene homogene Flüssigkeitsmasse der Dichte k handeln. Wir wählen die Rotationsachse zur z-Achse eines mit dem Flüssigkeitskörper fest verbundenen Achsenkreuzes und bezeichnen mit f die Gaußsche Attraktionskonstante, mit $\pi k f U$ das Gravitationspotential im Punkte (x, y, z). Wie wir wissen, kann die notwendige und hinreichende Bedingung für das relative Gleichgewicht so gefaßt werden: auf der Oberfläche der Flüssigkeit soll der Ausdruck

$$(1) \qquad U + \Omega(x^2 + y^2), \qquad \Omega = \frac{\omega^2}{2\pi f k}$$

überall den gleichen Wert haben.

Es sei nun ein Maclaurinsches oder Jacobisches Ellipsoid mit den Halbachsen $\sqrt{\varrho + 1}$, $\sqrt{\varrho + q}$ $(q \leqq 1)$, $\sqrt{\varrho}$, das zu dem Werte Ω_0 von Ω gehört, gegeben. Wir schreiben die Gleichungen der Flüssigkeitsoberfläche in Parameterdarstellung in der Form

$$(2) \qquad x = \sqrt{\varrho + 1}\sin\theta\cos\psi, \quad y = \sqrt{\varrho + q}\sin\theta\sin\psi, \quad z = \sqrt{\varrho}\cos\theta$$

und fragen, ob es nicht in der Nachbarschaft unseres Ellipsoids eine zu dem Werte $\Omega = \Omega_0 + \eta$ gehörige Gleichgewichtsfigur gibt, deren Oberfläche durch die Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{gathered} x = \sqrt{\varrho + \zeta + 1}\sin\theta\cos\psi, \quad y = \sqrt{\varrho + \zeta + q}\sin\theta\sin\psi, \\ z = \sqrt{\varrho + \zeta}\cos\theta \end{gathered}$$

charakterisiert sei. Hierin bezeichnet ζ eine von θ und ψ sowie von einem mit η zugleich verschwindenden Parameter $\varkappa$ abhängige Funktion, die für $\varkappa \to 0$ gleichmäßig gegen Null geht. Die Gleichgewichtsbedingung nimmt jetzt die Form an: auf der Oberfläche ist

$$(4) \qquad U + (\Omega_0 + \eta)(\varrho + \cos^2\psi + q\sin^2\psi + \zeta)\sin^2\theta = \text{Const.}$$

Liapounoff setzt nunmehr voraus, daß es zwei Werte l und g mit $l + g < 1$ gibt, so daß

$$(5) \qquad \begin{gathered} \left|\frac{\zeta}{\varrho}\right| < l, \qquad \frac{\zeta' - \zeta}{2\varrho\sqrt{2(1 - \cos\varphi)}} < g, \\ \cos\varphi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi') \end{gathered}$$

gilt und beweist, daß sich U alsdann in eine für alle θ und ψ unbedingt und gleichmäßig konvergente Reihe

$$(6) \qquad U = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots,$$

unter U_n einen bestimmten Integralausdruck n-ten Grades in ζ verstanden, entwickeln läßt. Es gilt

$$(7) \qquad U_n = \frac{1}{2\pi} \lim_{\substack{u \to \varrho \\ u < \varrho}} \sum \frac{\zeta^i}{i!\,(j+1)!} \left\{ \frac{\partial^{n-1}}{\partial u^i \partial v^j} \int \frac{G(v)\,(\zeta')^{j+1}}{D(u, v)}\, d\sigma' \right\}_{v = \varrho}.$$

Hierin bezeichnet $D(u, v)$ den Abstand der Punkte

$$(8)\qquad \begin{array}{lll} \sqrt{u+1}\sin\theta\cos\psi\,, & \sqrt{u+q}\,\sin\theta\sin\psi\,, & \sqrt{u}\cos\theta\,,\\ \sqrt{v+1}\sin\theta'\cos\psi', & \sqrt{v+q}\,\sin\theta'\sin\psi', & \sqrt{v}\cos\theta', \end{array}$$

$d\sigma'$ ist das Flächenelement der Einheitskugel, ferner ist zur Abkürzung

$$(9)\qquad \begin{aligned} G(v) &= \frac{H(v,\theta',\psi')}{\Delta(v)}, \qquad \Delta(v) = \sqrt{v(v+1)(v+q)}\,,\\ H(v,\theta',\psi') &= v(v+q)\sin^2\theta'\cos^2\psi' + v(v+1)\sin^2\theta'\sin^2\psi'\\ &\quad + (v+1)(v+q)\cos^2\theta' \end{aligned}$$

gesetzt worden. Das Summenzeichen erstreckt sich über alle der Folge $0, 1, \ldots, (n-1)$ angehörigen Werte von i und j mit $i+j=n-1$.

Setzt man in (4) für U den Ausdruck (6) ein und beachtet man, daß auf (2)

$$(10)\qquad U_0 + \Omega_0(\varrho + \cos^2\psi + q\sin^2\psi)\sin^2\theta = \text{Const.}$$

gilt, so erhält man zur Bestimmung von ζ die Beziehung

$$(11)\qquad RH\zeta - \frac{1}{4\pi}\int\frac{H'\zeta'\,d\sigma'}{D} = \frac{\Delta}{2}W + C \qquad (C \text{ konstant})$$

mit

$$(12)\qquad \begin{aligned} W &= \eta\,(\varrho + \cos^2\psi + q\sin^2\psi + \zeta)\sin^2\theta + U_2 + U_3 + \ldots,\\ R &= \frac{\varrho}{2}\int_\varrho^\infty \frac{dt}{t\Delta(t)} = \frac{\varrho}{2}\int_\varrho^\infty \frac{dt}{t\sqrt{t(t+1)(t+q)}}, \qquad \Delta = \sqrt{\varrho(\varrho+1)(\varrho+q)}\,,\\ H &= H(\varrho,\theta,\psi) = \varrho(\varrho+q)\sin^2\theta\cos^2\psi + \varrho(\varrho+1)\sin^2\theta\sin^2\psi\\ &\quad + (\varrho+1)(\varrho+q)\cos^2\theta, \qquad H' = H(\varrho,\theta',\psi'). \end{aligned}$$

In (11) bezeichnet D in naheliegender Weise den Abstand der durch die Werte θ, ψ bzw. θ', ψ' der Parameter charakterisierten Punkte des Ellipsoids. Nunmehr setzt Liapounoff

$$(13)\qquad \zeta = \zeta_1\varkappa + \zeta_2\varkappa^2 + \zeta_3\varkappa^3 + \ldots, \qquad \varkappa = |\eta|^{\frac{1}{\lambda}},$$

unter λ eine natürliche Zahl verstanden, und findet, daß sich eine Lösung allemal in dieser Form darstellen läßt. Eine ins einzelne gehende Diskussion, die sich auf alle Maclaurinschen und unendlichviele Jacobische Ellipsoide erstreckt, zeigt ferner, daß λ gleich 1 oder 2 gesetzt werden kann. In einer 1909 veröffentlichten kürzeren Abhandlung, Sur une classe de figures d'équilibre d'un liquide en rotation, Annales de l'École Normale (3) **26** (1909), S. 473—483, gelingt Liapounoff der Nachweis, daß es keine weiteren Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Flüssigkeitsellipsoide gibt, die in der Form (3), (13) darstellbaren Gestalten somit die Gesamtheit aller in Betracht kommenden Flüssigkeitskörper ausschöpfen. Was die Funktionen $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ betrifft, so wird angenommen, daß sie stetige partielle Ableitungen in bezug auf θ und ψ

haben, und daß es drei für hinreichend kleine Werte von $|\varkappa|$ konvergente Reihen mit positiven Gliedern

$$(14)\qquad \begin{gathered} l_1\varkappa + l_2\varkappa^2 + l_3\varkappa^3 + \ldots, \quad g_1\varkappa + g_2\varkappa^2 + g_3\varkappa^3 + \ldots, \\ h_1\varkappa + h_2\varkappa^2 + h_3\varkappa^3 + \ldots \end{gathered}$$

gibt, so daß $|\zeta_i| < l_i$, $\left|\frac{\partial \zeta_i}{\partial \theta}\right| < g_i$, $\left|\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \zeta_i}{\partial \psi}\right| < h_i$ gilt. Die zuletzt genannte Eigenschaft hat zur Folge, daß

$$(15)\qquad \begin{gathered} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} = \frac{\partial \zeta_1}{\partial \theta}\varkappa + \frac{\partial \zeta_2}{\partial \theta}\varkappa^2 + \ldots, \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \zeta}{\partial \psi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \zeta_1}{\partial \psi}\varkappa + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \zeta_2}{\partial \psi}\varkappa^2 + \ldots \end{gathered}$$

gesetzt werden kann und die unendlichen Reihen rechter Hand für hinreichend kleine $|\varkappa|$ gleichmäßig konvergieren.

Unter diesen Voraussetzungen läßt sich nach Liapounoff auch W in eine nach Potenzen von $\varkappa$ fortschreitende Reihe von der Form

$$W = W_1\varkappa + W_2\varkappa^2 + W_3\varkappa^3 + \ldots$$

entwickeln, und die Fundamentalbeziehung (11) löst sich in eine Folge linearer Integralgleichungen

$$(15^*)\qquad RH\zeta_n - \frac{1}{4\pi}\int \frac{H'\zeta_n' \, d\sigma'}{D} = \frac{\varDelta}{2} W_n + c_n \qquad (c_n \text{ konstant})$$

auf, in denen

$$W_1 = \begin{cases} 0 \text{ für } \lambda > 1, \\ (\varrho + \cos^2\psi + q\sin^2\psi)\sin^2\theta \quad \text{für } \lambda = 1, \ \eta > 0, \\ -(\varrho + \cos^2\psi + q\sin^2\psi)\sin^2\theta \quad \text{für } \lambda = 1, \ \eta < 0 \end{cases}$$

ist, $W_n (n > 1)$ aber eine bekannte Funktion von $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$ darstellt. Die Gleichungen (15*) gestatten die sukzessive Berechnung der Größen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$. Sie werden von Liapounoff durch Reihenentwicklungen nach geeigneten Laméschen Funktionen, d. h. im wesentlichen nach dem zu der Integralgleichung

$$RH\zeta - \frac{\nu}{4\pi}\int \frac{H'\zeta' \, d\sigma'}{D} = 0$$

gehörigen vollständigen Orthogonalsystem, unter Berücksichtigung gewisser Normierungsforderungen, gelöst. Liapounoff beweist die Konvergenz der unendlichen Reihen (13) und (15), indem er geeignete Majorantenreihen konstruiert. Eine eingehende Diskussion zeigt, daß nur, wenn die zu (11) gehörige homogene Integralgleichung außer den stets vorhandenen „trivialen" Lösungen eine oder mehrere nichttriviale Lösungen hat, das Verfahren neue, von den Flüssigkeitsellipsoiden verschiedene Gleichgewichtsfiguren liefert. Dies trifft, wie Liapounoff schon in seiner Dissertation, in der es sich nur um die erste Näherung handelte,

zeigte, für abzählbar unendlichviele, durch bestimmte Werte der Achsenverhältnisse charakterisierte (singuläre) Maclaurinsche und Jacobische Ellipsoide zu. Die spätere vollständige Diskussion zeigte, daß die Entwicklungen, in denen diesmal $\lambda = 2$ zu setzen ist, wenn von zwei Ausnahmefällen abgesehen wird, tatsächlich zu neuen, nicht ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren führen. Auszunehmen sind die beiden zu den Werten ω' und ω'' gehörigen Maclaurinschen Ellipsoide als Ausgangsfiguren. Sie sind singuläre Ellipsoide, die zugehörige Integralgleichung (11) hat nichttriviale Nullösungen, und doch zweigt von ihnen keine lineare Reihe neuer, d. h. von den Ellipsoidkörpern verschiedener (reeller) Gleichgewichtsfiguren ab.

Die Entscheidung darüber, ob von einem singulären Ausgangsellipsoid, d. h. einem Ellipsoid, das so beschaffen ist, daß die zugehörige homogene lineare Integralgleichung $m \geqq 1$ „nichttriviale" Nullösungen hat, lineare Reihen neuer (reeller) Gleichgewichtsfiguren ausgehen, hängt mit der Diskussion eines Systems von m endlichen Gleichungen, den sogenannten „Verzweigungsgleichungen" zusammen (vgl. S. 62). Diese Diskussion, die im allgemeinen recht umständliche Rechnungen erfordert, ist von Liapounoff für alle singulären Rotationsellipsoide und unendlichviele singuläre dreiachsige Ellipsoide in allen Einzelheiten durchgeführt worden. Die fundamentale Beziehung (11) ist eine nicht lineare Integralgleichung, die sich formal der einige Jahre später von Erhard Schmidt in einer bekannten Abhandlung behandelten umfassenden Klasse nichtlinearer Integralgleichungen subsumiert[41]. Freilich stellt in der Liapounoffschen Beziehung (11), die wir in der Form

$$RH\zeta - \frac{1}{4\pi}\int \frac{H'\zeta'\,d\sigma'}{D} - \frac{\Delta}{2}W - C = 0$$

schreiben wollen, die linke Seite nur formal eine „Integralpotenzreihe" dar, und zwar, weil die Konvergenz der unendlichen Reihe W wesentlich an die Existenz stetiger, dem absoluten Betrage nach hinreichend kleiner partieller Ableitungen von ζ in bezug auf geeignete Gaußsche Parameter der Fläche gebunden ist. Die Beziehung (11) ist darum eher als eine Integro-Differentialgleichung anzusprechen (vgl. S. 46). Das Verfahren von Liapounoff ist, wenn von der soeben erwähnten Komplikation abgesehen wird, mit dem Schmidtschen im Grunde identisch. Auch die an die Diskussion der Verzweigungsgleichungen geknüpften funktionalen Verzweigungen, die bei Liapounoff die Hauptrolle spielen, finden sich von ihm bereits in den Jahren 1905 und 1906 in allen Einzelheiten an-

[41] Vgl. E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, III. Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen, Math. Annalen **65** (1908), S. 370—399. Siehe auch meine Monographie, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen, Berlin 1931, S. 1—42.

gegeben. Diese Feststellungen schmälern nicht die großen Verdienste der um zwei bis drei Jahre später erschienenen Schmidtschen Untersuchungen; denn die Arbeiten von Liapounoff blieben lange Zeit nur wenig bekannt und sind auch heute nur mit großer Mühe lesbar. Dies hängt mit der in der Gesamtanlage begründeten, ungemein schwerfälligen Darstellung von Liapounoff zusammen, die mit einer hohen Meisterschaft in Durchführung von Einzelrechnungen keinesfalls in Widerspruch steht. Liapounoffs Darstellung ist rein analytisch, die zugrunde liegenden geometrischen Bilder treten kaum unmittelbar in die Erscheinung. Da auch die Theorie der linearen Integralgleichungen nicht benutzt wird, so erweist sich das Ganze der höchst wertvollen Liapounoffschen Untersuchungen leider als sehr unübersichtlich. Schließlich hat Liapounoff in der Sorge um die Durchführung der zahllosen an sein Problem sich knüpfenden Einzelheiten sich nicht darum bemüht, den allgemeinen Gedanken, auf dem seine Existenzbeweise beruhen, unabhängig von dem speziellen Problem der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten herauszuarbeiten.

Herr Schmidt hat den Zusammenhang seiner Theorie mit der Theorie rotierender Flüssigkeiten sehr wohl erkannt, nennt er doch in der Einleitung zu seiner Abhandlung das Auftreten von Bifurkationen in der Nachbarschaft gewisser Gleichgewichtsfiguren als ein Beispiel von funktionalen Verzweigungen (vgl. loc. cit. [41] S. 371). Diese Behauptung bedarf insofern einer Einschränkung, als es sich diesmal um Integralpotenzreihen mit nicht beschränkten Kernen, deren Konvergenz an die Differentiierbarkeit der zu bestimmenden Funktionen gebunden ist, handelt und der Konvergenzbeweis nicht ohne weiteres in der von Schmidt angegebenen Art und Weise durchgeführt werden kann (vgl. S. 53ff.).

Wir haben uns vorhin etwas eingehender mit den Ergebnissen von Liapounoff beschäftigt. Die gleichen Resultate findet Poincaré in seiner eingangs genannten großen Arbeit durch eine kühne Übertragung der an einem System mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden gewonnenen Ergebnisse auf eine rotierende Flüssigkeitsmasse. Von der Anschauung geleitet, man dürfe in der Mechanik angesichts der Schwierigkeit der Probleme nicht dasselbe Maß an Strenge wie in der Analysis fordern, bedient sich Poincaré im weiten Umfange heuristischer Überlegungen und gelangt darum nur vereinzelt zu voll begründeten Schlußfolgerungen. Die geschichtliche Bedeutung dieser Untersuchungen ist angesichts der vielen von Poincaré aufgeworfenen neuen Probleme und der starken, von ihm ausgehenden suggestiven Wirkung trotzdem sehr hoch anzuschlagen. Auch heute beherrschen ungeachtet der völlig einwandfreien exakten Liapounoffschen Ergebnisse die Poincaréschen heuristischen Methoden, denen nur schwer ein halbwegs überzeugender Sinn unterzulegen ist, das Feld, sobald von Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Flüssigkeitsellipsoide die Rede ist. Wir werden im folgenden nicht selten Gelegenheit haben, auf die Poincaréschen

Fragestellungen einzugehen, unsere Darstellung dürfte aber kaum von ihm irgendwie methodisch beeinflußt erscheinen.

Während Liapounoff sich durchaus auf die Untersuchung neuer Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Ellipsoide konzentriert, hat Poincaré einen allgemeinen Satz über die Existenz neuer Flüssigkeitsgestalten in der Nachbarschaft einer beliebigen Gleichgewichtsfigur postuliert; seine mehr ins Einzelne gehenden Betrachtungen betreffen freilich doch in erster Linie jene Liapounoffschen Flüssigkeitskörper. Das vorliegende dritte Kapitel bringt in seinen weiteren Ausführungen eine vollständige Behandlung des Poincaréschen Problems. Den Ausgangspunkt bildet eine Integro-Differentialgleichung, die als eine Verallgemeinerung der Liapounoffschen Fundamentalbeziehung (11) aufgefaßt werden kann. Die Darstellung ist mehr geometrisch orientiert und gestattet darum, die inneren Zusammenhänge, die bei Liapounoff zum Teil verborgen bleiben, viel leichter zu überblicken. Der Auflösung liegt ein Verfahren der sukzessiven Approximationen zugrunde. Der Konvergenzbeweis gestaltet sich dank einer ausgiebigen Benutzung der Fredholmschen Theorie linearer Integralgleichungen sowie gewisser neuartiger potential- und funktionentheoretischer Hilfsmittel ganz wesentlich einfacher als bei Liapounoff, obwohl es sich diesmal um allgemeinere Betrachtungen als bei ihm handelt. Auch bietet sich jetzt die Möglichkeit, in manchen Fällen die Existenz einer Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft einer Flüssigkeitskonfiguration, die nur in einer ersten Näherung die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt, zu erbringen (vgl. das fünfte Kapitel).

Unmittelbar von Poincaré beeinflußt sind die Arbeiten von Darwin und Schwarzschild.

7. Problemstellung. Die fundamentale Integro-Differentialgleichung[42]. In dem Raume der kartesischen Koordinaten x, y, z sei eine aus q $(\geqq 1)$ Einzelmassen ${}_jT$, deren Gesamtheit T heißen möge, bestehende Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeiten gegeben. Die Flüssigkeitsdichte habe in jedem Einzelgebiet ${}_jT$ einen konstanten Wert f_j, der übrigens von Gebiet zu Gebiet wechseln kann. Wie früher werden wir für die Gesamtheit der f_j zur Abkürzung meist f setzen. Die Begrenzung ${}_jS$ von ${}_jT$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$ besteht, wie wir wissen (vgl. S. 15), aus einer einzigen geschlossenen Fläche. Wird, wie wir es tun wollen, angenommen, daß alle ${}_jS$ der Klasse $A\,h$ angehören, so haben die

[42] Vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. a) Erste Abhandlung. Allgemeine Existenzsätze, Math. Zeitschr. **1** (1918), S. 229—284; **3** (1919), S. 172—174; b) Zweite Abhandlung. Stabilitätsbetrachtungen, Math. Zeitschr. **7** (1920), S. 126—231. Die Ausführungen des Haupttextes stellen in der Hauptsache eine verbesserte und wesentlich vereinfachte Fassung der Existenzsätze dieser Arbeiten dar.

einzelnen Flüssigkeitsmassen keinen Punkt miteinander gemeinsam, die Schwerkraft ist auf allen Randflächen ${}_jS$, kürzer auf S, von Null verschieden und in das Innere von ${}_jT$ gerichtet. Als Funktionen geeigneter Gaußscher Parameter aufgefaßt, besitzen die Koordinaten von ${}_jS$, wie es sich nachträglich zeigt (vgl. S. 11—12), stetige Ableitungen aller Ordnungen.

Wir bezeichnen die laufenden Koordinaten eines Punktes auf S mit X, Y, Z, das Gravitationspotential von T mit

$$(16)\qquad \varkappa V(x, y, z) = \varkappa \int_T \frac{f' d\tau'}{r},$$
$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2, \quad d\tau' = dx'dy'dz',$$

die Winkelgeschwindigkeit mit ω. Damit das (relative) Gleichgewicht möglich sei, ist notwendig und hinreichend, daß der Ausdruck

$$(17)\qquad \frac{1}{\varkappa} U(X, Y, Z) = V(X, Y, Z) + \frac{\omega^2}{2\varkappa}(X^2 + Y^2)$$

auf jeder Randfläche ${}_jS$ einen konstanten Wert hat (vgl. S. 11). Wie in dem vorhergehenden Kapitel bewiesen worden ist, haben alle ${}_jS$ eine auf der Rotationsachse, die wir wie üblich zur z-Achse machen, senkrecht stehende Symmetrieebene[43]. Wir wählen sie zur Ebene $z = 0$. Der Schwerpunkt des Systems liegt also im Koordinatenursprung.

Indem Stabilitätsfragen vorerst außer Betracht bleiben, wollen wir untersuchen, ob es für Werte der Winkelgeschwindigkeit ω_1 in einem hinreichend kleinen Intervalle $\langle \omega^{(1)}, \omega^{(2)} \rangle$, das ω in seinem Innern oder auf dem Rande enthält, in einer Umgebung erster Ordnung von T weitere Figuren T_1 des relativen Gleichgewichtes gibt, die (nach Poincaré) eine „*lineare Reihe*" bilden. Darunter ist folgendes zu verstehen.

Die Berandung S_1 von T_1 besteht aus q geschlossenen Flächen ${}_jS_1$ mit stetiger Normale, die den Flächen ${}_jS$ $(j = 1, \ldots, q)$ umkehrbar eindeutig zugeordnet sind und gegen diese für $\omega_1 \to \omega$ konvergieren[44]. Sind P und P_1 irgendein Paar korrespondierender, d. h. auf derselben Normalen zu S gelegenen Punkte auf S und S_1, so konvergiert für $\omega_1 \to \omega$ die Normale zu S_1 in P_1 gegen die Normale zu S in P, und zwar

[43] In meinen in der Fußnote [42] genannten Abhandlungen a) und b) habe ich darüber hinaus angenommen, daß die Dichte überall den gleichen Wert hat und daß T auch noch eine durch die Rotationsachse hindurchgehende Symmetrieebene hat. Seitdem ist von Herrn E. Hölder gezeigt worden, daß diese Voraussetzung überflüssig ist. Herr E. Hölder hat auch von Herrn E. Kähler bemerkte Beispiele von homogenen Gleichgewichtsfiguren mit nur einer Symmetrieebene sichergestellt. (Vgl. die in der Fußnote [59] zitierten Arbeiten von E. Hölder. Siehe auch die Ausführungen des Textes S. 64ff.)

[44] Genauer, der Höchstwert der Entfernung eines beliebigen Punktes auf irgendeiner Komponente von S_1 von der zugehörigen Komponente von S soll für $\omega_1 \to \omega$ gegen Null konvergieren.

Die Komponente der von dem Flüssigkeitskörper T in dem Punkte (ξ, η) seiner Oberfläche auf einen materiellen Punkt von der Masse 1 ausgeübten Anziehungskraft in der Richtung von (ν) hat den Wert

$$\varkappa \frac{\partial}{\partial \nu} W(\xi, \eta, 0) . \tag{26}$$

Die Schwerkraft im Punkte (ξ, η) steht auf S senkrecht und ist (positiv nach außen gerichtet) gleich

$$\varkappa \frac{\partial}{\partial \nu} W(\xi, \eta, 0) + \omega^2 R \tau = \varkappa \psi . \tag{27}$$

Der Wert dieser Ortsfunktion in (ξ', η') wird mit $\varkappa \psi'$ bezeichnet. Den Ausführungen zu Eingang dieses Paragraphen gemäß ist $\psi < 0$.[47]

Es sei (ξ, η, ζ) der Punkt (X_1, Y_1, Z_1) auf S_1. Wir setzen

$$V_1(X_1, Y_1, Z_1) = V_1(\xi, \eta) \tag{28}$$

und analog, wenn (ξ, η) den Punkt (X, Y, Z) auf S bezeichnet,

$$V(X, Y, Z) = V(\xi, \eta) . \tag{29}$$

Der Ausdruck $\varkappa(V_1 - V)$ läßt sich in eine für hinreichend kleine Werte von $|\zeta|$, $\left|\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right|$, $\left|\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right|$ unbedingt und gleichmäßig konvergierende Reihe

$$\varkappa(V_1 - V) = V^{(1)} + V^{(2)} + V^{(3)} + \ldots \tag{30}$$

entwickeln, die folgende Eigenschaften hat:

1. Es ist

$$V^{(n)} = \varkappa \int_S \frac{1}{\varrho^n} K^{(n)} d\sigma', \tag{31}$$

unter $K^{(n)}$ eine Form n-ten Grades der Variablen ζ, ζ', $\frac{\partial \zeta'}{\partial \xi'}$, $\frac{\partial \zeta'}{\partial \eta'}$ verstanden[48].

2. Es gilt

$$\begin{aligned} \varkappa \frac{\partial}{\partial \xi}(V_1 - V) &= \varkappa \sum_{n=1}^{\infty} \int_S \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\varrho^n} K^{(n)}\right) d\sigma', \\ \varkappa \frac{\partial}{\partial \eta}(V_1 - V) &= \varkappa \sum_{n=1}^{\infty} \int_S \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\varrho^n} K^{(n)}\right) d\sigma'. \end{aligned} \tag{32}$$

---

[47] Wir bezeichnen mit ψ die Größe, die in den Abhandlungen a) und b) loc. cit.[42], wo die Dichte wohlbemerkt überall den gleichen Wert hatte, $f\psi$ hieß.

[48] Der Wahl der Gaußschen Parameter ξ, η liegt, wie vorhin (S. 39) erwähnt, eine dachziegelartige Überdeckung von S zugrunde. Offenbar gehören zu gewissen Gebieten auf S zwei oder mehr verschiedene Systeme von Parametern ξ, η. Der Ausdruck $K^{(n)}$ ist indessen von der speziellen Wahl der fraglichen Parameter unabhängig.

Die unendlichen Reihen rechter Hand konvergieren unbedingt und gleichmäßig. Übrigens sind sogar die Reihen $\sum |V^{(n)}|$, $\sum \left|\frac{\partial}{\partial \xi} V^{(n)}\right|$, $\sum \left|\frac{\partial}{\partial \eta} V^{(n)}\right|$ gleichmäßig konvergent.

Die Reihen (30) und (32) konvergieren, wie gleichzeitig gezeigt werden wird, auch wenn für ζ, $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ dem absoluten Betrage nach hinreichend kleine *komplexe* Werte eingesetzt werden. Die Reihe (30) ist als *Definitionsgleichung* von V_1 für komplexe ζ aufzufassen.

Beweis: Neben den Flächen S und S_1 betrachten wir die einparametrige Flächenschar S_t $(0 \leqq t \leqq 1)$, die sich symbolisch in der Form $S + t(S_1 - S)$ darstellen läßt. Dem Punkte (ξ, η) auf S entspricht auf S_t ein Punkt mit den (krummlinigen) Koordinaten $\xi, \eta, t\zeta$. Der von S_t begrenzte Körper heiße T_t, sein Gravitationspotential im Punkte (ξ, η, ζ^*) sei $\varkappa W_t(\xi, \eta, \zeta^*)$ und insbesondere im Punkte $(\xi, \eta, t\zeta)$ auf S_t einfacher $\varkappa V_t(\xi, \eta)$. Wie wir sogleich zeigen werden, läßt sich die Differenz $\varkappa(V_t(\xi, \eta) - V(\xi, \eta))$ nach Potenzen von t entwickeln. In der so gewonnenen Reihe, die übrigens für alle t mit $|t| < t^*$ $(t^* > 1)$ gilt, wird alsdann $t = 1$ gesetzt.

Wir beginnen mit der Herleitung eines Ausdruckes für $\frac{\partial V_t}{\partial t}$. Es gilt:

$$(33) \quad \frac{1}{h}(V_{t+h} - V_t) = \frac{1}{h}\{W_{t+h}[\xi, \eta, (t+h)\zeta] - W_t(\xi, \eta, t\zeta)\}$$
$$= \frac{1}{h}\{W_{t+h}[\xi, \eta, (t+h)\zeta] - W_{t+h}(\xi, \eta, t\zeta)\}$$
$$+ \frac{1}{h}\{W_{t+h}(\xi, \eta, t\zeta) - W_t(\xi, \eta, t\zeta)\}.$$

Der Ausdruck $W_{t+h}(\xi, \eta, t\zeta) - W_t(\xi, \eta, t\zeta)$ stellt das Potential des schalenförmigen Körpers $T_{t+h} - T_t$ im Punkte $(\xi, \eta, t\zeta)$ auf S_t dar. Es sei φ_t der von der Außennormale an S_t in diesem Punkte mit der Geraden (ν) eingeschlossene Winkel, $d\sigma_t'$ das Flächenelement von S_t in $(\xi', \eta', t\zeta')$ und ϱ_t die Entfernung der Punkte $(\xi, \eta, t\zeta)$ und $(\xi', \eta', t\zeta')$. Von den Normalen an S durch den Rand von $d\sigma_t'$ wird aus $T_{t+h} - T_t$ ein Volumen herausgeschnitten, das, positiv oder negativ angesetzt, je nachdem $\zeta' > 0$ oder < 0 ist, bis auf Größen höherer Ordnung in bezug auf h den Wert

$$(34) \qquad \zeta' h \cos \varphi_t' \, d\sigma_t'$$

hat. Das zweite Glied rechts in (33) liefert demnach für $h \to 0$, wie sich ohne Schwierigkeiten zeigen läßt (vgl. loc. cit. [42] a) Fußnote [23]),

$$(35) \qquad \int_{S_t} \frac{f'}{\varrho_t} \zeta' \cos \varphi_t' \, d\sigma_t'.$$

Der erste Summand gibt für $h \to 0$ den Wert

$$\zeta \frac{\partial}{\partial \nu} W_t(\xi, \eta, t\zeta),$$

der sich nach einer teilweisen Integration in bekannter Weise auf die Form

$$(36) \qquad -\zeta \int\limits_{S_t} \frac{f'}{\varrho_t} \cos \theta_t' \, d\sigma_t'$$

bringen läßt (vgl. loc. cit. [42] a) Fußnote [24]). Hierin bezeichnet θ_t' den von der Außennormale an S_t im Punkte $(\xi', \eta', t\zeta')$ mit der Geraden (ν) eingeschlossenen Winkel. Es gilt demnach

$$(37) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial V_t}{\partial t} &= \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} W_t(\xi, \eta, t\zeta) + \int\limits_{S_t} \frac{f'}{\varrho_t} \zeta' \cos \varphi_t' \, d\sigma_t' \\ &= \int\limits_{S_t} \frac{f'}{\varrho_t} (\zeta' \cos \varphi_t' - \zeta \cos \theta_t') \, d\sigma_t'. \end{aligned}$$

Sind

$$(38) \qquad x = X(\xi, \eta), \quad y = Y(\xi, \eta), \quad z = Z(\xi, \eta)$$

die Gleichungen von S, so lauten diejenigen der Fläche S_t

$$(39) \qquad x = X + at\zeta, \quad y = Y + bt\zeta, \quad z = Z + ct\zeta,$$

unter a, b, c die Richtungskosinus der Normale (ν) verstanden. Es gilt

$$(40) \qquad \begin{gathered} d\sigma_t' = d\xi' d\eta' \sqrt{A_t'^2 + B_t'^2 + C_t'^2}, \quad A_t' = \frac{\partial (Y' + b't\zeta', Z' + c't\zeta')}{\partial (\xi', \eta')}, \\ B_t' = \frac{\partial (Z' + c't\zeta', X' + a't\zeta')}{\partial (\xi', \eta')}, \quad C_t' = \frac{\partial (X' + a't\zeta', Y' + b't\zeta')}{\partial (\xi', \eta')}, \\ \cos \varphi_t' = \frac{a'A_t' + b'B_t' + c'C_t'}{\sqrt{A_t'^2 + B_t'^2 + C_t'^2}}, \quad \cos \theta_t' = \frac{aA_t' + bB_t' + cC_t'}{\sqrt{A_t'^2 + B_t'^2 + C_t'^2}}, \end{gathered}$$

mithin in naheliegender Schreibweise

$$(41) \qquad \frac{\partial V_t}{\partial t} = \int\limits_{S} \frac{f'}{\varrho_t} \sum A_t' (a'\zeta' - a\zeta) \, d\xi' d\eta'.$$

Wir denken uns hierbei die Parameter ξ, η so gewählt, daß in den Formeln (40) die Quadratwurzel mit dem positiven Zeichen zu versehen ist.

Aus (39) und den analogen Ausdrücken für die kartesischen Koordinaten des Punktes $(\xi', \eta', t\zeta')$ auf S_t ergibt sich

$$(42) \quad \varrho_t^2 = \varrho^2 + 2t \sum (X' - X)(a'\zeta' - a\zeta) + t^2 \sum (a'\zeta' - a\zeta)^2 = \varrho^2 [1 + k(t)].$$

Es sei t^* eine Zahl > 1 und k^* ein positiver echter Bruch. Wie man sich leicht überzeugt, ist für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen reellen oder *komplexen* Werte von $\zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$, etwa

$$(43) \qquad |\zeta|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right| \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_0,$$

und alle *komplexen* t in dem Bereiche $|t| \leqq t^*$

(44) $$|k(t)| \leqq k^*.$$

Der Quotient $\left|\frac{\varrho_t}{\varrho}\right|$ ist demnach von Null verschieden.

Das Integral

(45) $$J = \int_S \frac{f'}{\varrho_t} \sum A_t'(a'\zeta' - a\zeta)\, d\xi'\, d\eta' = \int_S \frac{f'}{\varrho} \frac{1}{\sqrt{1+k(t)}} \sum A_t'(a'\zeta' - a\zeta)\, d\xi'\, d\eta'$$

ist eine in dem Gebiete $|t| < t^*$ analytische und reguläre Funktion von t.

Dies erkennt man wohl am einfachsten wie folgt. Man setze $\int_S = \int_{S-\bar{S}} + \int_{\bar{S}}$, unter $\bar{S}$ den in der Kreisfläche $(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 \leqq \bar{D}^2$ in der Nachbarschaft von (ξ, η) enthaltenen Teil von S verstanden. Das Integral $\int_{S-\bar{S}}$ ist, wie man unmittelbar sieht, eine analytische und reguläre Funktion von t. Berücksichtigt man, daß $\left|\int_{\bar{S}}\right|$ für alle (ξ, η) auf S und alle t im Bereiche $|t| \leqq t^*$ für $\bar{D} \to 0$ gleichmäßig verschwindet, daß mithin gleichmäßig $\int_S = \lim_{\bar{D}\to 0} \int_{S-\bar{S}}$ gilt, so erhält man in der Tat unsere Behauptung.

Wie sich ohne Schwierigkeiten zeigen läßt, ist

(46) $$\frac{\partial J}{\partial \xi} = \int_S f' \sum (a'\zeta' - a\zeta) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right) d\xi'\, d\eta' - \int_S f' \sum \frac{\partial}{\partial \xi}(a\zeta) \frac{A_t'}{\varrho_t}\, d\xi'\, d\eta';$$

denn betrachten wir zum Beweis den Ausdruck

(47) $$L = \int_S f' \sum (a'\zeta' - a\zeta) \frac{A_t'}{\varrho_t + h}\, d\xi'\, d\eta' \qquad (h > 0),$$

so ist, da in (47) die zu integrierende Funktion und ihre partiellen Ableitungen in bezug auf ξ und η durchweg stetig sind, bsp.

(48) $$\frac{\partial L}{\partial \xi} = \int_S f' \sum (a'\zeta' - a\zeta) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t + h}\right) d\xi'\, d\eta' - \int_S f' \sum \frac{\partial}{\partial \xi}(a\zeta) \frac{A_t'}{\varrho_t + h}\, d\xi'\, d\eta'.$$

Der Ausdruck rechter Hand konvergiert, wie man leicht verifiziert, für alle in Betracht kommenden t und alle (ξ, η) auf S gleichmäßig gegen die rechte Seite von (46) für $h \to 0$. Gleichzeitig konvergiert L gegen J. Nach bekannten Sätzen gilt also, wie behauptet, die Formel (46).

Jetzt macht es augenscheinlich keine Mühe einzusehen, daß auch $\frac{\partial J}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial J}{\partial \eta}$, als Funktionen von t aufgefaßt, in dem Gebiete $|t| < t^*$ analytisch und regulär sind.

Nach bekannten Sätzen ist für alle $n > 1$

$$(49)\qquad \frac{\partial^{n-1} J}{\partial t^{n-1}} = \lim_{\bar{D}\to 0} \int\limits_{S-\bar{S}} f' \sum (a'\zeta' - a\zeta) \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\frac{A'_t}{\varrho_t}\right) d\xi' d\eta'$$

$$= \int f' \sum (a'\zeta' - a\zeta) \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\frac{A'_t}{\varrho_t}\right) d\xi' d\eta'.$$

Der Grenzübergang ist für alle (ξ, η) auf S und alle t in jedem Bereiche $|t| \leqq t_* < t^*$ gleichmäßig.

Augenscheinlich stellt auch $V_t(\xi, \eta)$, sofern

$$(50)\qquad |\zeta|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right| \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_0$$

angenommen wird, eine für alle t in dem Bereiche $|t| < t^*$ analytische und reguläre Funktion dar. Es gilt (für $n \geqq 3$)

$$(51)\qquad \frac{\partial^n V_t}{\partial t^n} = \frac{\partial^{n-1} J}{\partial t^{n-1}} = \int\limits_S f' \sum (a'\zeta' - a\zeta) \left\{ A'_t \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\frac{1}{\varrho_t}\right) \right.$$

$$\left. + \binom{n-1}{1} \frac{\partial A'_t}{\partial t} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\left(\frac{1}{\varrho_t}\right) + \binom{n-1}{2} \frac{\partial^2 A'_t}{\partial t^2} \frac{\partial^{n-3}}{\partial t^{n-3}}\left(\frac{1}{\varrho_t}\right) \right\} d\xi' d\eta'.$$

Der Ausdruck $\left[\frac{\partial^n V_t}{\partial t^n}\right]_{t=0}$ läßt sich demnach, wie leicht ersichtlich, auf die Gestalt $n! \int\limits_S \frac{1}{\varrho^n} K^{(n)} d\sigma'$ bringen, unter $K^{(n)}$ eine Form n-ten Grades von $\zeta, \zeta', \frac{\partial \zeta'}{\partial \xi'}, \frac{\partial \zeta'}{\partial \eta'}$ verstanden. Jede der zuletzt genannten partiellen Ableitungen kommt in $K^{(n)}$ übrigens nur linear vor.

Der Taylor-Cauchysche Entwicklungssatz liefert

$$(52)\qquad V_t(\xi, \eta) - V(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[\frac{\partial^n V_t}{\partial t^n}\right]_{t=0}$$

und für $t = 1$, wie behauptet,

$$(53)\qquad \varkappa(V_1 - V) = V^{(1)} + V^{(2)} + V^{(3)} + \dots$$

$$V^{(n)} = \varkappa \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n V_t}{\partial t^n}\right]_{t=0} = \varkappa \int\limits_S \frac{1}{\varrho^n} K^{(n)} d\sigma',$$

$$(54)\qquad \frac{1}{\varrho^n} K^{(n)} = \frac{1}{n!} \frac{1}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} f' \sum (a'\zeta' - a\zeta) \left\{ A'_t \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\frac{1}{\varrho_t}\right) \right.$$

$$\left. + \binom{n-1}{1} \frac{\partial A'_t}{\partial t} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\left(\frac{1}{\varrho_t}\right) + \binom{n-1}{2} \frac{\partial^2 A'_t}{\partial t^2} \frac{\partial^{n-3}}{\partial t^{n-3}}\left(\frac{1}{\varrho_t}\right) \right\}_{t=0},$$

$$(55)\qquad A' = \frac{\partial(Y', Z')}{\partial(\xi', \eta')}, \quad B' = \frac{\partial(Z', X')}{\partial(\xi', \eta')} \quad C' = \frac{\partial(X', Y')}{\partial(\xi', \eta')}.$$

Es sei Γ ein Kreis um den Koordinatenursprung vom Halbmesser t^*

in der Ebene der komplexen Variablen t. Es gilt in naheliegender Schreibweise

$$(56)\qquad \begin{aligned} J(\xi,\eta;t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{J(\xi,\eta;\bar t)}{\bar t - t}\,d\bar t \quad \text{sowie} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} J(\xi,\eta;t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\frac{\partial}{\partial\xi} J(\xi,\eta;\bar t)}{\bar t - t}\,d\bar t, \quad \bar t = t^* e^{i\delta}, \quad 0 \leqq \delta \leqq 2\pi. \end{aligned}$$

Hieraus folgt vor allem fast unmittelbar, daß die Funktionen $V^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ stetige Ableitungen erster Ordnung in bezug auf ξ und η haben. Ferner gilt für alle $|t| \leqq t_* < t^*$

$$(57)\qquad \varkappa J(\xi,\eta;t) = \varkappa \frac{\partial}{\partial t} V_t(\xi,\eta) = V^{(1)} + 2V^{(2)}t + 3V^{(3)}t^2 + \ldots,$$

$$(58)\qquad \varkappa \frac{\partial}{\partial\xi} J(\xi,\eta;t) = \frac{\partial}{\partial\xi} V^{(1)} + 2\frac{\partial}{\partial\xi} V^{(2)}t + 3\frac{\partial}{\partial\xi} V^{(3)}t^2 + \ldots,$$

somit nach einer Integration in bezug auf t zwischen 0 und 1

$$(59)\qquad \varkappa(V_1 - V) = V^{(1)} + V^{(2)} + V^{(3)} + \ldots,$$

$$(60)\qquad \varkappa\frac{\partial}{\partial\xi}(V_1 - V) = \frac{\partial}{\partial\xi}V^{(1)} + \frac{\partial}{\partial\xi}V^{(2)} + \frac{\partial}{\partial\xi}V^{(3)} + \ldots.$$

Ebenso findet man

$$(61)\qquad \varkappa\frac{\partial}{\partial\eta}(V_1 - V) = \frac{\partial}{\partial\eta}V^{(1)} + \frac{\partial}{\partial\eta}V^{(2)} + \frac{\partial}{\partial\eta}V^{(3)} + \ldots.$$

Die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\partial}{\partial\xi}V^{(n)}\right|$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\partial}{\partial\eta}V^{(n)}\right|$ konvergieren für alle t mit $|t| \leqq t_* < t^*$ gleichmäßig.

Aus (37) und (53) folgt insbesondere

$$(62)\qquad V^{(1)} = \varkappa\zeta\frac{\partial}{\partial\nu}W(\xi,\eta,0) + \varkappa\int_S \frac{f'}{\varrho}\zeta'\,d\sigma'.$$

Aus (49) folgt für $n = 2$

$$(63)\qquad \frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2} = \int_S f'\sum(a'\zeta' - a\zeta)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right)d\xi'\,d\eta'.$$

Die Funktion $\frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2}$ hat für alle t mit $|t| \leqq t_* < t^*$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf ξ und η. Es genügt, die beiden Seiten der Beziehung (56) in bezug auf t zu differentiieren, um sich hiervon zu überzeugen. Es gilt

$$(64)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^3 V_t}{\partial\xi\,\partial t^2} = &\int_S f'\sum(a'\zeta' - a\zeta)\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial t}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right)d\xi'\,d\eta' \\ &- \int_S f'\sum\frac{\partial}{\partial\xi}(a\zeta)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right)d\xi'\,d\eta'. \end{aligned}$$

Es sei jetzt

$$(65)\qquad |\zeta|,\ \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right|,\ \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right| \leqq \Omega \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_0$$

gesetzt. Aus (63), (64) und der analogen Formel für $\frac{\partial^3 V_t}{\partial\eta\,\partial t^2}$ folgt wegen (65) für alle t in dem Intervalle $0 \leqq t \leqq t^*$ leicht

$$(66)\qquad \left|\frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^3 V_t}{\partial\xi\,\partial t^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^3 V_t}{\partial\eta\,\partial t^2}\right| \leqq \frac{1}{\varkappa}\beta\Omega^2 \qquad (\beta \text{ konstant}).$$

Wegen

$$(67)\qquad \Psi\{\zeta\} = \varkappa\left(V_1 - V - \left[\frac{\partial V_t}{\partial t}\right]_{t=0}\right) = \varkappa\int_0^1 dt\int_0^t \frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2}\,dt,$$

$$(68)\qquad \varkappa\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{V_1 - V - \left[\frac{\partial V_t}{\partial t}\right]_{t=0}\right\} = \varkappa\int_0^1 dt\int_0^t \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2}\,dt$$

ist

$$(69)\qquad \begin{gathered} \varkappa\left|V_1 - V - \frac{1}{\varkappa}V^{(1)}\right| = \left|V^{(2)} + V^{(3)} + \dots\right| = |\Psi\{\zeta\}| < \beta\Omega^2, \\ \left|\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right| < \beta\Omega^2 \end{gathered}$$

und analog

$$(70)\qquad \left|\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right| < \beta\Omega^2.$$

Aus (39) ergibt sich, wenn man $t=1$ setzt,

$$(71)\qquad X_1 = X + a\zeta,\quad Y_1 = Y + b\zeta,\quad Z_1 = Z + c\zeta.$$

Demnach ist

$$(72)\qquad \begin{aligned} X_1^2 + Y_1^2 &= X^2 + Y^2 + 2(aX + bY)\zeta + (a^2 + b^2)\zeta^2 \\ &= R^2 + 2R\tau\zeta + (a^2 + b^2)\zeta^2. \end{aligned}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$(73)\qquad \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\varkappa} = \lambda$$

und erhalten

$$(74)\qquad \begin{aligned} \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}(X_1^2 + Y_1^2) - \frac{\omega^2}{2\varkappa}(X^2 + Y^2) &= \lambda(X_1^2 + Y_1^2) + \frac{\omega^2}{2\varkappa}(X_1^2 + Y_1^2 - X^2 - Y^2) \\ &= \lambda R^2 + \frac{\omega^2}{\varkappa}R\tau\zeta + \frac{\omega^2}{2\varkappa}(a^2 + b^2)\zeta^2 + 2\lambda R\tau\zeta + (a^2 + b^2)\lambda\zeta^2. \end{aligned}$$

Aus (19), (30), (27), (62) und (74) ergibt sich nunmehr die Beziehung

$$(75)\qquad \begin{aligned} \psi\zeta + \int_S \frac{f'}{\varrho}\zeta'\,d\sigma' &= s - R^2\lambda - \frac{\omega^2}{2\varkappa}(a^2 + b^2)\zeta^2 - 2R\tau\lambda\zeta - (a^2 + b^2)\lambda\zeta^2 \\ &\quad - \frac{1}{\varkappa}(V^{(2)} + V^{(3)} + \dots) = s - R^2\lambda + \Pi\{\lambda, \zeta\}. \end{aligned}$$

Dies ist eine nichtlineare Integro-Differentialgleichung zur Bestimmung von ζ. Sie entspricht der Liapounoffschen Integro-Differentialglei-

chung (11). A. a. O. handelt es sich um die Bestimmung neuer Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft Maclaurinscher und Jacobischer Ellipsoide, und die mit ζ bezeichnete Größe hat dort eine etwas andere Bedeutung als in unseren Formeln. Bei der Ableitung der Gleichung (11) bedient sich Liapounoff bereits einer zu der Flächenschar ξ, η, $t\zeta$ analogen Körperschar θ, ψ, $\varepsilon\zeta$ $(0 \leqq \varepsilon \leqq 1)$, bleibt aber im Gegensatz zu unseren Betrachtungen in der Hauptsache im Gebiete des Reellen. Demgegenüber ist die systematische Heranziehung funktionentheoretischer Hilfsmittel für unsere Betrachtungen wesentlich. Als ein weiterer springender Punkt der von uns benutzten Methode sei der Ausdruck (37) für $\frac{\partial V_t}{\partial t}$ und seine Entwicklung nach Potenzen von t hervorgehoben. Liapounoff geht unmittelbar von dem Ausdruck $V_1 - V$ aus.

In dem Vorstehenden handelte es sich um einen evtl. aus mehreren Einzelmassen bestehenden Flüssigkeitskörper, der wie ein starrer Körper rotiert. In dem zweiten Kapitel ist gelegentlich der allgemeinere Fall einer gravitierenden Flüssigkeit betrachtet worden, deren Teilchen um die z-Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit rotieren, die nur von dem Abstande von der Umdrehungsachse abhängt,

$$(76) \qquad \omega = \omega(\mathfrak{r}^2), \qquad \mathfrak{r}^2 = x^2 + y^2.$$

Wie a. a. O. gezeigt worden ist, lautet die notwendige und, falls $p \geqq 0$, auch hinreichende Bedingung dafür, daß eine stationäre Bewegung von der soeben bezeichneten Art bestehen kann, daß auf S

$$(77) \qquad \varkappa V(X, Y, Z) + \Phi(R^2) = \text{Const.}, \qquad \Phi(\mathfrak{r}^2) = \int_0^{\mathfrak{r}} \omega^2(\mathfrak{r}'^2)\, \mathfrak{r}' d\mathfrak{r}', \\ (R^2 = X^2 + Y^2)$$

gilt. Es sei jetzt T eine topologisch ganz wie vorhin beschaffene Flüssigkeitsmasse, deren Teilchen in einer stationären Bewegung der soeben betrachteten Art begriffen sind[49]. Auch diesmal soll die Schwerkraft auf S durchweg nach innen gerichtet sein, $\psi < 0$. Es sei $\omega_1(\mathfrak{r}^2)$ ein von dem vorhin betrachteten verschiedenes Gesetz der Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit von dem Abstande $\mathfrak{r}$. Wir fragen, ob es für hinreichend kleine Werte von $|\omega_1^2(\mathfrak{r}^2) - \omega^2(\mathfrak{r}^2)|$ in der Umgebung erster Ordnung von T eine Flüssigkeitskonfiguration T_1 gibt, die in stationärer, durch die Funktion $\omega_1(\mathfrak{r}^2)$ charakterisierter Bewegung begriffen sei. Auf S_1 gilt

$$(78) \qquad \varkappa V_1(X_1, Y_1, Z_1) + \Phi_1(R_1^2) = \text{Const.}, \qquad \Phi_1(R_1^2) = \int_0^{R_1} \omega_1^2(\mathfrak{r}'^2)\, \mathfrak{r}' d\mathfrak{r}', \\ (R_1^2 = X_1^2 + Y_1^2).$$

---

[49] Im Gegensatz zu früheren Entwicklungen wird jetzt den Betrachtungen ein im Raume festes Achsenkreuz und, wie bei permanenten Bewegungen üblich, das Eulersche System von Variablen zugrunde gelegt. Wie wir wissen (vgl. S. 15), hat die Konfiguration Rotationssymmetrie um die z-Achse.

Wir denken uns wie vorhin die Punkte von S_1 auf das krummlinige Koordinatensystem ξ, η, ζ bezogen und erhalten auch diesmal für $\varkappa(V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V(X, Y, Z))$ die Formel (59). Statt (74) ist jetzt der Ausdruck

$$(79)\qquad \int_0^{R_1} \omega_1^2(\mathfrak{r}'^2)\,\mathfrak{r}'\,d\mathfrak{r}' - \int_0^{R} \omega^2(\mathfrak{r}'^2)\,\mathfrak{r}'\,d\mathfrak{r}'$$
$$= \int_0^{R_1} [\omega_1^2(\mathfrak{r}'^2) - \omega^2(\mathfrak{r}'^2)]\,\mathfrak{r}'\,d\mathfrak{r}' + \int_R^{R_1} \omega^2(\mathfrak{r}'^2)\,\mathfrak{r}'\,d\mathfrak{r}'$$

zu betrachten. Der zweite Summand rechts kann auf die Form

$$(80)\qquad \omega^2(R^2)\frac{R_1^2 - R^2}{2} + \int_R^{R_1} [\omega^2(\mathfrak{r}'^2) - \omega^2(R^2)]\,\mathfrak{r}'\,d\mathfrak{r}'$$
$$= \omega^2(R^2)\,R\,\mathfrak{r}\,\zeta + \frac{\omega^2(R^2)}{2}(a^2 + b^2)\,\zeta^2 + \int_R^{R_1} [\omega^2(\mathfrak{r}'^2) - \omega^2(R^2)]\,\mathfrak{r}'\,d\mathfrak{r}'$$

gebracht werden. Wie man leicht verifiziert, ergeben die Beziehungen (77), (78), (79) und (80) jetzt die Integro-Differentialgleichung

$$(81)\qquad \psi\zeta + \int_S \frac{f'}{\varrho}\zeta'\,d\sigma' = s - \frac{\omega^2(R^2)}{2\varkappa}(a^2 + b^2)\,\zeta^2 - \frac{1}{\varkappa}\int_R^{R_1} [\omega^2(\mathfrak{r}'^2) - \omega^2(R^2)]\,\mathfrak{r}'\,d\mathfrak{r}'$$
$$- \frac{1}{\varkappa}\int_0^{R_1} [\omega_1^2(\mathfrak{r}'^2) - \omega^2(\mathfrak{r}'^2)]\,\mathfrak{r}'\,d\mathfrak{r}' - \frac{1}{\varkappa}(V^{(2)} + V^{(3)} + \ldots).$$

Faßt man $|s|$, Ω und $\mathrm{Max}|\omega_1^2(\mathfrak{r}^2) - \omega^2(\mathfrak{r}^2)|$ für alle $\mathfrak{r} \leqq \mathrm{Max}(R, R_1)$ als kleine Größen erster Ordnung auf, so sind der dritte und der vierte Summand rechter Hand, wie man sich leicht überzeugt, Größen zweiter und erster Ordnung, und zwar entsprechend mit Ω^2 und $\mathrm{Max}\,|\,\omega_1^2(\mathfrak{r}^2) - \omega^2(\mathfrak{r}^2)|$ vergleichbar. In der Tat ist

$$J_1 = \frac{1}{\varkappa}\int_R^{R_1} [\omega^2(\mathfrak{r}'^2) - \omega^2(R^2)]\,\mathfrak{r}'\,d\mathfrak{r}'$$
$$= \frac{1}{\varkappa}\int_R^{R_1} (\mathfrak{r}'^2 - R^2)\frac{d}{d\mathfrak{r}'^2}\omega^2[R^2 + \vartheta(\mathfrak{r}'^2 - R^2)]\,\mathfrak{r}'\,d\mathfrak{r}' \qquad (0 < \vartheta < 1),$$

somit $|J_1| = O(|R_1 - R|^2) = O(\Omega^2)$.[49a] Ferner ist, wie man leicht sieht,

$$|J_2| = \frac{1}{\varkappa}\left|\int_0^{R_1} [\omega_1^2(\mathfrak{r}'^2) - \omega^2(\mathfrak{r}'^2)]\,\mathfrak{r}'\,d\mathfrak{r}'\right| = O(\mathrm{Max}\,|\omega_1^2(\mathfrak{r}^2) - \omega^2(\mathfrak{r}^2)|).$$

Ist speziell $\omega^2(\mathfrak{r}^2) = \text{konstant} = \omega^2$, d. h. rotiert die (diesmal von Umdrehungsflächen um die z-Achse begrenzte) Ausgangsfigur wie ein starrer

[49a] Die Bezeichnung $F(t) = O(t)$ besagt, daß $\left|\frac{1}{t}F(t)\right|$ für $t \to 0$ unterhalb einer endlichen Schranke bleibt.

Körper, so erhält man einfacher

$$(82)\quad \psi\zeta + \int\limits_S \frac{f'}{\varrho}\zeta' d\sigma' = s - \frac{\omega^2}{2\varkappa}(a^2+b^2)\zeta^2 - \frac{1}{\varkappa}\int\limits_0^{R_1}[\omega_1^2(\mathfrak{r}'^2) - \omega^2]\mathfrak{r}' d\mathfrak{r}' - \frac{1}{\varkappa}(V^{(2)} + V^{(3)} + \ldots).$$ [50]

Es sei zum Schluß bemerkt, daß es sich bei Behandlung konvexer Gleichgewichtsfiguren gelegentlich als vorteilhaft erweist, die Minkowskische Stützfunktion heranzuziehen (vg. E. Hölder, loc. cit. [71] S. 192 ff.).

8. Eine lineare Integralgleichung. Betrachten wir die homogene lineare Integralgleichung

$$(83)\quad \psi\zeta + \int\limits_S \frac{f'}{\varrho}\zeta' d\sigma' = 0.$$

Sie geht durch die Substitution $Z = \zeta\sqrt{-\psi}\sqrt{f}$ in eine Integralgleichung mit symmetrischem Kern über. Man beachte, daß $\psi < 0$ vorausgesetzt worden ist. *Sie hat stets triviale Nullösungen, nämlich* $u_1 =$ const. c *und, falls T kein Rotationskørper um die z-Achse ist,* $u_2 =$ const. $\gamma =$ const. $(Xb - Ya)$. Diese Nullösungen entspringen der Eigenschaft jeder Gleichgewichtsfigur, bei einer Translation längs der Rotationsachse sowie bei einer Drehung um diese in eine zu dem gleichen Wert der Winkelgeschwindigkeit und zum gleichen Wert des Gesamtpotentials auf S gehörige Gleichgewichtsfigur überzugehen.

Denken wir uns etwa den Körper T um eine kleine Strecke δ_* in der Richtung der z-Achse verschoben. Die Verschiebung ζ_* in der Richtung von (ν) ist, wie sich zeigen läßt, eine nebst ihren Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion und hat den Wert $\zeta_* = c\,\delta_* + o(\delta_*)$, $\lim\limits_{\delta_*\to 0}\frac{1}{\delta_*}o(\delta_*) = 0$. Ferner gilt $|\zeta_*|, \left|\frac{\partial\zeta_*}{\partial\xi}\right|, \left|\frac{\partial\zeta_*}{\partial\eta}\right| \leqq \Omega_*$, wo Ω_* von der Ordnung δ_* ist.

Aus (75) folgt, wenn man für ζ, s und λ entsprechend ζ_*, 0, 0 setzt, in naheliegender Schreibweise

$$(84)\quad \psi\zeta_* + \int\limits_S \frac{f'}{\varrho}\zeta'_* d\sigma' = -\frac{\omega^2}{2\varkappa}(a^2+b^2)\zeta_*^2 - \frac{1}{\varkappa}(V_*^{(2)} + V_*^{(3)} + \ldots),$$

---

[50] Mit stationären Flüssigkeitsbewegungen der auf S. 47—48 betrachteten Art beschäftigt sich P. Dive loc. cit. [21]. Vgl. auch P. Dive, Comptes Rendus **194** (1932), 58—61. Seine Fragestellung ist freilich von der unserigen verschieden. Herr Dive bemüht sich in erster Linie um die Bestimmungen derjenigen Verteilungen der Winkelgeschwindigkeit, die einer vorgegebenen, bestimmten Bedingungen genügenden, permanenten Flüssigkeitsbewegung der im Text betrachteten Art entsprechen würde.

Man vergleiche in diesem Zusammenhang eine demnächst in der Mathematischen Zeitschrift erscheinende Note von Herrn W. Jardetzky, Bemerkungen über die Figuren zonal rotierender Flüssigkeiten, die von den Gleichgewichtsfiguren abzweigen. Herr Jardetzky beschäftigt sich mit dem im Haupttext zuletzt betrachteten Spezialfall. Ich habe meinerseits auf die ganze Fragestellung bereits in meinen Vorlesungen über kosmogonische Hypothesen S.-S. 1928 hingewiesen.

wo nach (69)

$$|V_*^{(2)} + V_*^{(3)} + \ldots| < \beta \Omega_*^2 \tag{85}$$

gilt. Läßt man jetzt $\delta_* \to 0$ gehen, so erhält man augenscheinlich wegen (84) und (85), wie behauptet,

$$\psi c + \int_S \frac{f'}{\varrho} c' d\sigma' = 0 .$$

In ähnlicher Weise überzeugt man sich, daß, wenn T keine Rotationssymmetrie um die z-Achse hat, auch $\gamma = Xb - Ya$ die Gleichung (83) befriedigt. Ist T ein Umdrehungskörper um die z-Achse, so ist $Xb - Ya$ identisch gleich Null.

Wir denken uns u_1 und, falls T kein Rotationskörper ist, auch u_2 den Beziehungen

$$\int_S f \psi u_1^2 d\sigma = -1 , \quad \int_S f \psi u_2^2 d\sigma = -1 \tag{86}$$

gemäß normiert. Die Gleichungen (86) gehen durch die Substitution $Z = \zeta \sqrt{-\psi} \sqrt{f}$ in die üblichen Normierungsbeziehungen über.

Es ist leicht zu sehen, daß die Nullösungen u_k $(k = 1, \ldots, m)$, als Funktionen geeigneter Gaußscher Parameter ξ, η aufgefaßt, stetige Ableitungen aller Ordnungen haben. Vor allem hat ψ diese Eigenschaft. Das Potential $\int_{{}_jS} \frac{f'}{\varrho} u_k' d\sigma'$ einer einfachen Belegung mit stetiger Dichte erfüllt auf ${}_jS$ (und darum gewiß überall auf S) eine H-Bedingung mit jedem Exponenten $\nu < 1$.[50a]

Wegen

$$\psi u_k + \int_S \frac{f'}{\varrho} u_k' d\sigma' = 0 \tag{87}$$

hat u_k die gleiche Eigenschaft. Nunmehr hat das Potential $\int_{{}_jS} \frac{f'}{\varrho} u_k' d\sigma'$ auf ${}_jS$ stetige, einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\nu < 1$ genügende Ableitungen erster Ordnung (vgl. **1.** 5). Aus (87) folgt sofort, daß $\frac{\partial u_k}{\partial \xi}, \frac{\partial u_k}{\partial \eta}$ existieren und einer ebensolchen H-Bedingung genügen. So geht man sukzessive weiter und gelangt zu der vorstehenden Aussage. Es möge speziell T, das kein Rotationskörper sein soll, auch noch eine Symmetrieebene durch die Rotationsachse haben. Wir wählen sie zur Ebene $y = 0$. Es seien σ^* und $\sigma^{*\prime}$ bzw. σ_* und σ_*' die Punkte, die zu σ und σ' in bezug auf die Ebene $y = 0$, bzw. $z = 0$ symmetrisch liegen.

[50a] Dem Satze **1. 4.** zufolge erfüllt das Potential $\int_{{}_jS} \frac{f'}{\varrho} u_k' d\sigma'$ auf ${}_jS$ eine H-Bedingung mit jedem Exponenten $\nu < 1$; auf ${}_lS$ $(l \neq j)$ hat es aber gewiß stetige Ableitungen aller Ordnungen.

Es gilt

$$u_1(\sigma^*) = u_1(\sigma), \qquad u_1(\sigma_*) = -u_1(\sigma);$$
$$u_2(\sigma^*) = -u_2(\sigma), \qquad u_2(\sigma_*) = u_2(\sigma). \tag{88}$$

Die Integralgleichung (83) möge außer u_1 und u_2 noch weitere Nulllösungen haben, und es sei $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$ ein vollständiges System linear unabhängiger Lösungen von (83). Es sei vorübergehend

$$v_3(\sigma) = u_3(\sigma^*), \ldots, v_m(\sigma) = u_m(\sigma^*) \tag{89}$$

gesetzt. Wie man leicht verifiziert, sind auch die Funktionen $v_3(\sigma), \ldots, v_m(\sigma)$ Lösungen von (83). Auch die Funktionen

$$w_l = u_l + v_l \quad \text{und} \quad \overline{w}_l = u_l - v_l \tag{90}$$

sind Nullösungen von (83), sofern sie nicht identisch verschwinden. Wegen $u_l = \frac{w_l + \overline{w}_l}{2}$ läßt sich jede Nullösung der Integralgleichung (83) linear durch die Lösungen $w_l, \overline{w}_l$ $(l = 1, \ldots, m)$ ausdrücken. Also läßt sich aus $w_l, \overline{w}_l$ ein vollständiges System linear unabhängiger Lösungen, etwa w_{1l} $(l = 1, \ldots, m)$ aussondern. Entweder ist

$$w_{1l}(\sigma^*) = w_{1l}(\sigma) \quad \text{oder} \quad w_{1l}(\sigma^*) = -w_{1l}(\sigma). \tag{91}$$

Da $u_2(\sigma^*) = -u_2(\sigma)$ ist, so gibt es mindestens eine Nullösung der zweiten Art. Da $w_1 = 2u_1, \overline{w}_2 = 2u_2$ ist, so kann man sich gewiß so einrichten, daß das System w_{1l} die Nullösungen u_1 und u_2 enthält. Von diesem System ausgehend gewinnt man, wenn man den vorhin durchgeführten Prozeß in bezug auf die Ebene $z = 0$ wiederholt, ein neues vollständiges System linear unabhängiger Nullösungen, dessen einzelne Individuen auch bei dem Übergang von σ zu σ_* entweder ungeändert bleiben oder das Vorzeichen wechseln. Die Gesamtheit der Nullösungen zerfällt damit in vier verschiedene Kategorien. Man kann sich augenscheinlich so einrichten, daß die Funktionen u_1 und u_2 auch dem neuen System angehören und die einzelnen Nullösungen, die wir der Einfachheit halber wieder mit $u_1, u_2, \ldots, u_m$ bezeichnen, die Orthogonalitäts- und Normierungsbeziehungen

$$\int_S f \psi\, u_j u_l\, d\sigma = 0 \quad (j \neq l), \qquad \int_S f \psi\, u_j^2\, d\sigma = -1 \tag{92}$$

erfüllen. Es genügt hierzu, die Lösungen jeder einzelnen Kategorie für sich in bekannter Weise zu orthogonalisieren und zu normieren.

Wir nehmen schließlich an, daß T, wie bei den Flüssigkeitsellipsoiden, auch noch die Ebene $x = 0$ zu einer Symmetrieebene hat. Es läßt sich dann ganz wie vorhin zeigen, daß man die Nullösungen nunmehr in acht verschiedene Kategorien zerfällen kann. Auch bei dem Übergang von σ zu dem in bezug auf die Ebene $x = 0$ symmetrischen Punkte ändern sich die Nullösungen nicht oder wechseln das Vorzeichen.

Es sei jetzt T ein Rotationskörper um die z-Achse. Wir bestimmen die Lage eines Punktes auf S vorübergehend durch seine längs des Meridians gemessene Entfernung von dem Pole, $\mathfrak{s}$, und durch den Azimutwinkel, d. h. den mit der Ebene $y=0$ eingeschlossenen Winkel $\mathfrak{d}$ des betrachteten Meridians. *Wie wir jetzt zeigen wollen, sind die Eigenfunktionen der Integralgleichung*

$$\psi\zeta + \nu\int\limits_S \frac{f'}{\varrho}\zeta' d\sigma' = 0 \tag{93}$$

entweder von der Form $\mathfrak{F}(\mathfrak{s})$, *oder sie treten paarweise auf und lassen sich durch die Formeln*

$$\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s})\cos k\mathfrak{d}, \qquad \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s})\sin k\mathfrak{d},$$

unter k eine positive ganze Zahl verstanden, ausdrücken.

In dem ersteren Falle haben die Eigenfunktionen Rotationssymmetrie um die z-Achse, in dem zweiten Falle haben sie k durch die Umdrehungsachse hindurchgehende Symmetrieebenen. Überdies geht $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s})\sin k\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s})\cos k\mathfrak{d}$ durch eine Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2k}$ über.

Es sei $\mathfrak{u}(\mathfrak{s},\mathfrak{d})$ irgendeine Eigenfunktion der Integralgleichung (93). Für ψ, σ, ϱ schreiben wir jetzt der Übersichtlichkeit halber $\psi(\mathfrak{s},\mathfrak{d})$, $\sigma(\mathfrak{s},\mathfrak{d})$, $\varrho(\mathfrak{s},\mathfrak{d};\mathfrak{s}',\mathfrak{d}')$. Für (93) tritt jetzt die ausführlichere Formel

$$\psi(\mathfrak{s},\mathfrak{d})\,\mathfrak{u}(\mathfrak{s},\mathfrak{d}) + \nu\int\limits_S f(\mathfrak{s}',\mathfrak{d}')\frac{\mathfrak{u}(\mathfrak{s}',\mathfrak{d}')\,d\sigma(\mathfrak{s}',\mathfrak{d}')}{\varrho(\mathfrak{s},\mathfrak{d};\mathfrak{s}',\mathfrak{d}')} = 0 \tag{94}$$

ein. Sei α eine beliebige Konstante. Aus (94) folgt

$$\psi(\mathfrak{s},\mathfrak{d}+\alpha)\,\mathfrak{u}(\mathfrak{s},\mathfrak{d}+\alpha) + \nu\int\limits_S f(\mathfrak{s}',\mathfrak{d}'+\alpha)\frac{\mathfrak{u}(\mathfrak{s}',\mathfrak{d}'+\alpha)\,d\sigma(\mathfrak{s}',\mathfrak{d}'+\alpha)}{\varrho(\mathfrak{s},\mathfrak{d}+\alpha;\mathfrak{s}',\mathfrak{d}'+\alpha)} = 0. \tag{95}$$

Die Schwerkraft $\varkappa\,\psi(\mathfrak{s},\mathfrak{d})$ ist nun von dem Azimutwinkel unabhängig. Es gilt demnach $\psi(\mathfrak{s},\mathfrak{d}+\alpha)=\psi(\mathfrak{s},\mathfrak{d})$. Ferner ist, da S eine Rotationsfläche um die z-Achse ist,

$$\varrho(\mathfrak{s},\mathfrak{d}+\alpha;\mathfrak{s}',\mathfrak{d}'+\alpha) = \varrho(\mathfrak{s},\mathfrak{d};\mathfrak{s}',\mathfrak{d}') \qquad \text{und} \qquad d\sigma(\mathfrak{s}',\mathfrak{d}'+\alpha) = d\sigma(\mathfrak{s}',\mathfrak{d}').$$

Für (95) können wir schließlich wegen $f(\mathfrak{s}',\mathfrak{d}'+\alpha)=f(\mathfrak{s}',\mathfrak{d}')$ schreiben

$$\psi(\mathfrak{s},\mathfrak{d})\,\mathfrak{u}(\mathfrak{s},\mathfrak{d}+\alpha) + \nu\int\limits_S f(\mathfrak{s}',\mathfrak{d}')\frac{\mathfrak{u}(\mathfrak{s}',\mathfrak{d}'+\alpha)\,\mathfrak{d}\sigma(\mathfrak{s}',\mathfrak{d}')}{\varrho(\mathfrak{s},\mathfrak{d};\mathfrak{s}',\mathfrak{d}')} = 0.$$

Die Funktion $\mathfrak{u}(\mathfrak{s},\mathfrak{d}+\alpha)$ ist also für alle α eine Eigenfunktion von (94). Demnach ist auch die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial\mathfrak{d}}\mathfrak{u}(\mathfrak{s},\mathfrak{d})$ eine Eigenfunktion, außer wenn sie identisch verschwindet. In diesem Falle ist $\mathfrak{u}(\mathfrak{s},\mathfrak{d}) \equiv \mathfrak{F}(\mathfrak{s})$. Auch die partiellen Ableitungen höherer Ordnung $\frac{\partial^2}{\partial\mathfrak{d}^2}\mathfrak{u}(\mathfrak{s},\mathfrak{d}), \frac{\partial^3}{\partial\mathfrak{d}^3}\mathfrak{u}(\mathfrak{s},\mathfrak{d}), \ldots$ sind, wenn sie nicht identisch verschwinden, Eigenfunktionen.

Es sei jetzt

$$(96)\qquad \mathfrak{u}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{u}^{(n)}$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Eigenfunktionen von (94), und es möge $\frac{\partial}{\partial \mathfrak{b}} \mathfrak{u}^{(1)}$ nicht identisch verschwinden.

In der Reihe der Funktionen

$$\mathfrak{u}^{(1)}, \frac{\partial}{\partial \mathfrak{b}} \mathfrak{u}^{(1)}, \frac{\partial^2}{\partial \mathfrak{b}^2} \mathfrak{u}^{(1)}, \ldots$$

die ebenfalls der Integralgleichung (94) genügen, kann es höchstens n linear unabhängige geben, $\mathfrak{u}^{(1)}$ genügt demnach, als Funktion von $\mathfrak{b}$ aufgefaßt, einer linearen Differentialgleichung mit (bezüglich $\mathfrak{b}$) konstanten Koeffizienten von höchstens n-ter Ordnung. Es sei die Differentialgleichung niedrigster Ordnung

$$(97)\qquad \frac{\partial^m \mathfrak{u}^{(1)}}{\partial \mathfrak{b}^m} + d_1 \frac{\partial^{m-1} \mathfrak{u}^{(1)}}{\partial \mathfrak{b}^{m-1}} + \ldots + d_m \mathfrak{u}^{(1)} = 0 \qquad (m \leqq n).$$

Da $\mathfrak{u}^{(1)}, \frac{\partial \mathfrak{u}^{(1)}}{\partial \mathfrak{b}}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} \mathfrak{u}^{(1)}}{\partial \mathfrak{b}^{m-1}}$ linear unabhängige Eigenfunktionen von (94) sind und zugleich m linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (97) darstellen, so ist jede Lösung dieser Differentialgleichung eine Eigenfunktion.

Da $u^{(1)}$, als Funktion von $\mathfrak{b}$ aufgefaßt, eine periodische Funktion mit der Periode 2π ist, so muß die charakteristische Gleichung

$$\mathfrak{z}^m + d_1 \mathfrak{z}^{m-1} + \ldots + d_m \mathfrak{z} = 0$$

lauter verschiedene rein imaginäre Wurzeln haben. Einem Paar konjugiert komplexer Wurzeln $\pm k i$ entsprechen die reellen Eigenfunktionen $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \cos k\mathfrak{b}$, $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin k\mathfrak{b}$. Da diese die Periode 2π haben sollen, so muß k eine ganze Zahl sein.

Ist $\mathfrak{u}^{(1)} = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \cos k\mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin k\mathfrak{b} = -\frac{1}{k} \frac{\partial \mathfrak{u}^{(1)}}{\partial \mathfrak{b}}$. Diese beiden Funktionen bilden demnach eine Gruppe zusammengehöriger linear unabhängiger Eigenfunktionen. Wie man sieht, ist also $m = 2$.

Ist $m < n$, so gibt es in (96) mindestens eine Eigenfunktion, etwa $u^{(2)}$, die unter den soeben gefundenen Funktionen nicht enthalten ist. Wie vorhin läßt sich jetzt zeigen, daß $u^{(2)}$ entweder die Form $\mathfrak{F}(\mathfrak{s})$ hat oder einer Gruppe von Eigenfunktionen angehört, die einer zu (97) analogen linearen Differentialgleichung genügen und von der Form $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \cos k\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin k\mathfrak{b}$ sind.

Es sei insbesondere $\nu = 1$. Wie wir wissen, gibt es stets eine Eigenfunktion der Integralgleichung (93) von der Form $\mathfrak{F}(\mathfrak{s})$; es ist dies die früher mit u_1 bezeichnete triviale Nullösung.

9. Sukzessive Näherungen. Die Integralgleichung (83) möge, wie vorhin, m ($\geqq 2$) linear unabhängige Nullösungen $u_1, u_2, \ldots, u_m$, die wir uns den Formeln (92) gemäß normiert denken, haben. Ist T ein Rotations-

körper um die z-Achse, so ist $u_2 \equiv 0$. Wir setzen

$$\frac{1}{\varrho} = \mathfrak{N}(\sigma, \sigma') + \sum_{l=1}^{m} \psi \psi' u_l u_l'. \tag{98}$$

Nach bekannten Sätzen hat die Integralgleichung

$$\psi \zeta + \int f' \mathfrak{N}(\sigma, \sigma') \zeta' d\sigma' = 0 \tag{99}$$

keine Nullösungen[51]. Es gilt $\mathfrak{N}(\sigma_*, \sigma_*') = \mathfrak{N}(\sigma, \sigma')$. In dem besonderen Falle, daß T eine Symmetrieebene durch die Rotationsachse hat, ist überdies $\mathfrak{N}(\sigma^*, \sigma^{*\prime}) = \mathfrak{N}(\sigma, \sigma')$.

Wir schreiben jetzt die Integro-Differentialgleichung (75) in der Form

$$\psi \zeta + \int_S f' \mathfrak{N} \zeta' d\sigma' = s - R^2 \lambda + \Pi\{\lambda, \zeta\} + \sum_{l=1}^{m} \psi r_l u_l, \tag{100}$$

$$r_l = -\int_S f' \psi' u_l' \zeta' d\sigma' \qquad (l = 1, \ldots, m), \tag{101}$$

fassen r_l zunächst als unbestimmte Parameter auf[52] und beweisen, daß *die Integro-Differentialgleichung* (100) *für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen reellen oder komplexen Werte von* $\lambda, s, r_1, \ldots, r_m$ *eine und nur eine nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige, den Beziehungen* $|\zeta|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right| \leqq \varepsilon^* < \varepsilon_0$ *genügende Lösung hat.*

Die Auflösung erfolgt durch sukzessive Approximationen. Der Konvergenzbeweis gelingt leicht unter Zuhilfenahme einiger Hilfssätze, die zuvörderst abgeleitet werden sollen.

Es sei $\dot{\zeta}$ eine wie ζ beschaffene Funktion, und es möge $\dot{S}$ die Fläche, deren Punkte die krummlinigen Koordinaten $\xi, \eta, \dot{\zeta}$ haben, bezeichnen. Der von $\dot{S}$ begrenzte Raumteil heiße $\dot{T}$. Wir nehmen auch

$$|\dot{\zeta}|, \left|\frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \eta}\right| \leqq \Omega \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_0 \tag{102}$$

---

[51] Die Integralgleichung (83) ist der durch die Substitution $Z = \zeta \sqrt{-\psi} \sqrt{f}$ gewonnenen Integralgleichung $Z(\sigma) - \int_S \frac{\sqrt{f}\sqrt{f'}}{\sqrt{-\psi}\sqrt{-\psi'}} \frac{1}{\varrho} Z' d\sigma' = 0$ äquivalent. Ihre in der üblichen Weise normierten Eigenfunktionen sind $u_l \sqrt{-\psi} \sqrt{f}$ $(l = 1, \ldots, m)$. Der Kern $\frac{\sqrt{f}\sqrt{f'}}{\sqrt{-\psi}\sqrt{-\psi'}} \frac{1}{\varrho} - \Sigma u_l u_l' \sqrt{-\psi}\sqrt{-\psi'} \sqrt{f}\sqrt{f'} = \frac{\sqrt{f}\sqrt{f'}}{\sqrt{-\psi}\sqrt{-\psi'}} \mathfrak{N}(\sigma, \sigma')$ hat nach bekannten Sätzen der Theorie linearer Integralgleichungen mit symmetrischem Kern keine Nullösungen. Man verifiziert hiernach leicht, daß auch (99) keine Nullösungen hat.

[52] Einer ähnlichen Zerlegung des Kernes in Summanden bedient sich Herr E. Schmidt in seinen Untersuchungen über die Verzweigung der Lösungen nichtlinearer Integralgleichungen. Siehe E. Schmidt, loc. cit. [41]. Man vergleiche in diesem Zusammenhang unsere früheren Bemerkungen über die Entwicklungen von Liapounoff (S. 34—35).

an und erhalten in naheliegender Schreibweise (vgl. (67)) für $\Psi\{\dot{\zeta}\} = \dot{\Psi}$

$$|\dot{\Psi}|,\ \left|\frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial \xi}\right|,\ \left|\frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial \eta}\right| \leqq \beta\,\Omega^2. \tag{103}$$

Wir setzen des weiteren

$$|\zeta - \dot{\zeta}|,\ \left|\frac{\partial}{\partial \xi}(\zeta - \dot{\zeta})\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial \eta}(\zeta - \dot{\zeta})\right| \leqq \varpi \leqq 2\Omega \tag{104}$$

voraus und nehmen ε so klein an, daß (vgl. S. 42) $t^* = 4$ zugelassen werden kann und darum Beziehungen von der Form

$$|\Psi\{\zeta\}|,\ \left|\frac{\partial}{\partial \xi}\Psi\{\zeta\}\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial \eta}\Psi\{\zeta\}\right| \leqq \beta'\,\Omega^2 \qquad (\beta' \text{ konstant}) \tag{105}$$

auch dann bestehen, wenn entgegen der Festsetzung (65)

$$|\zeta|,\ \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right|,\ \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right| \leqq 4\Omega, \quad \Omega \leqq \varepsilon \tag{106}$$

gilt.

Wir schalten jetzt zwischen S_1 und $\dot{S}_1$ eine stetige Schar von Flächen, die sich symbolisch in der Form $S_t = S_1 + \frac{t}{\varpi}(\dot{S}_1 - S_1)$ darstellen läßt, ein. Dem Punkte (ξ, η, ζ) auf S_1 entspricht der Punkt $(\xi, \eta, \zeta) = (\xi, \eta, \zeta + \frac{t}{\varpi}(\dot{\zeta} - \zeta))$ auf S_t. Für $t = 0$ fällt S_t mit S_1, für $t = \varpi$ mit $\dot{S}_1$ zusammen. Für $t = 3\Omega$ ist $\left|\zeta + \frac{t}{\varpi}(\dot{\zeta} - \zeta)\right| \leqq 4\Omega$. Der zu S_t gehörige Wert des zu (67) analogen Ausdruckes wird mit Ψ_t bezeichnet.

Es sei jetzt Γ der Kreis vom Radius 3Ω um den Ursprung in der Ebene der komplexen Veränderlichen t. Der Cauchyschen Integralformel zufolge ist für alle $|t| < 3\Omega$

$$\Psi_t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\Psi_\delta}{\delta - t}\,d\delta \qquad (\delta = 3\Omega\,e^{ix}) \tag{107}$$

und

$$\frac{\partial \Psi_t}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\Psi_\delta}{(\delta - t)^2}\,d\delta. \tag{108}$$

Insbesondere ist für $|t| \leqq \varpi \leqq 2\Omega$ wegen $|\Psi_\delta| \leqq \beta'\,\Omega^2$, $|\delta - t| \geqq \Omega$ und $\frac{1}{|\delta - t|} \leqq \frac{1}{\Omega}$

$$\left|\frac{\partial \Psi_t}{\partial t}\right| \leqq \frac{1}{2\pi}\beta'\,\Omega^2\,\frac{2\pi \cdot 3\Omega}{\Omega^2} = 3\beta'\,\Omega. \tag{109}$$

In ähnlicher Weise erhält man

$$\left|\frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \xi\,\partial t}\right|,\ \left|\frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \eta\,\partial t}\right| \leqq 3\beta'\,\Omega. \tag{110}$$

Nunmehr finden wir aus

$$\dot{\Psi} - \Psi = \int_0^{\varpi} \frac{\partial \Psi_t}{\partial t}\,dt \tag{111}$$

wegen (109)

$$(112) \qquad |\dot{\Psi} - \Psi| \leqq 3\beta' \Omega \mho$$

sowie analoge Beziehungen für die partiellen Ableitungen erster Ordnung von $\dot{\Psi} - \Psi$. Wir fassen unsere Ergebnisse in den Ungleichheiten

$$(113) \qquad |\dot{\Psi} - \Psi|, \quad \left|\frac{\partial}{\partial \xi}(\dot{\Psi} - \Psi)\right|, \quad \left|\frac{\partial}{\partial \eta}(\dot{\Psi} - \Psi)\right| \leqq \boldsymbol{B}_0 \Omega \mho$$

zusammen[53].

Es sei jetzt

$$(114) \qquad |s|, \ |\lambda|, \ |r_1|, \ \ldots, \ |r_m| \leqq \Omega_1 .$$

Wie man fast unmittelbar sieht, ist wegen (69), (70) und (113)

$$(115) \qquad |\Pi|, \ \left|\frac{\partial \Pi}{\partial \xi}\right|, \ \left|\frac{\partial \Pi}{\partial \eta}\right|, \ |\dot{\Pi}|, \ \left|\frac{\partial \dot{\Pi}}{\partial \xi}\right|, \ \left|\frac{\partial \dot{\Pi}}{\partial \eta}\right| \leqq \boldsymbol{A}_*(\Omega^2 + \Omega\Omega_1)$$

sowie

$$(116) \qquad |\Pi - \dot{\Pi}|, \ \left|\frac{\partial}{\partial \xi}(\Pi - \dot{\Pi})\right|, \ \left|\frac{\partial}{\partial \eta}(\Pi - \dot{\Pi})\right| \leqq \boldsymbol{B}_*(\Omega + \Omega_1)\mho .$$

Es sei nunmehr $\mathfrak{H}(\sigma, \sigma')$ der lösende Kern von $\frac{1}{\psi} f' \mathfrak{N}$. Aus (100) folgt

$$(117) \qquad \zeta = \frac{1}{\psi}(s - R^2\lambda) + \sum_{l=1}^{m} r_l u_l + \frac{1}{\psi}\Pi\{\lambda, \zeta\}$$

$$- \int\limits_S \mathfrak{H}(\sigma, \sigma') \left[\frac{1}{\psi'}(s' - R'^2\lambda) + \sum_{l=1}^{m} r_l u_l' + \frac{1}{\psi'}\Pi'\{\lambda, \zeta'\}\right] d\sigma'$$

und wegen

$$(118) \qquad \int\limits_S \mathfrak{H}(\sigma, \sigma') u_l' \, d\sigma' = 0 \qquad (l = 1, \ldots, m),$$ [54]

---

[53] Die vorstehenden Überlegungen (Benutzung des Cauchyschen Integrals) habe ich zuerst in meiner Arbeit, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie I. Math. Zeitschr. **23** (1925), S. 72—88, angewandt.

[54] Aus (98) folgt durch Multiplikation mit $f' u_l'$ und Integration wegen (92) sofort

$$(119) \qquad \int\limits_S f' \mathfrak{N}(\sigma, \sigma') u_l' \, d\sigma' = 0 .$$

Nach bekannten Sätzen ist ferner (vgl. bsp. den Encyklopädieartikel von Toeplitz und Hellinger II C 13, S. 1372).

$$(120) \qquad -\frac{1}{\psi} f' \mathfrak{N}(\sigma, \sigma') + \mathfrak{H}(\sigma, \sigma') + \int\limits_S \frac{1}{\psi''} f' \mathfrak{N}(\sigma'', \sigma') \mathfrak{H}(\sigma, \sigma'') \, d\sigma'' = 0 .$$

Hieraus und aus (119) folgt fast unmittelbar $\int\limits_S \mathfrak{H}(\sigma, \sigma') u_l' \, d\sigma' = 0$. In ähnlicher Weise findet man

$$(121) \qquad \int\limits_S \psi f \mathfrak{H}(\sigma, \sigma') u_l \, d\sigma = 0 .$$

Übrigens ist $\mathfrak{H}(\sigma, \sigma')$ eine Pseudoresolvente des Kernes $\frac{f}{\psi \varrho}$ (vgl. a. a. O. S. **1374** sowie **1377**).

wenn noch

$$(122)\qquad s - R^2\lambda + \Pi\{\lambda,\zeta\} = \Pi\{s,\lambda,\zeta\}$$

gesetzt wird, einfacher:

$$(123)\qquad \zeta = \frac{1}{\psi}\Pi\{s,\lambda,\zeta\} + \sum_{l=1}^{m} r_l u_l - \int_S \mathfrak{H}(\sigma,\sigma')\frac{1}{\psi'}\Pi'\{s',\lambda,\zeta'\}\,d\sigma'.$$

Wird mit $\Theta\{\lambda,\zeta\}$ die Gesamtheit der Glieder zweiter und höherer Ordnung rechter Hand bezeichnet, so gilt

$$(124)\qquad |\Theta| \leqq A_1(\Omega^2 + \Omega\Omega_1),\qquad |\Theta - \dot\Theta| \leqq B_1(\Omega + \Omega_1)\,\mho.$$

Dabei ist natürlich

$$(125)\qquad \psi\Theta + \int_S f'\,\mathfrak{R}\,\Theta'\,d\sigma' = \Pi\{\lambda,\zeta\},\quad \text{oder auch}$$

$$(126)\qquad \psi\Theta = \Pi\{\lambda,\zeta\} - \int_S \frac{f'}{\varrho}\Theta'\,d\sigma' + \sum_{l=1}^{m}\psi u_l\int_S f'\psi' u_l'\,\Theta'\,d\sigma'.$$

Der erste Integralausdruck rechts erfüllt als Potential einer einfachen Belegung stetiger Dichte eine H-Bedingung mit beliebigem Exponenten $\nu < 1$ (vgl. **1.** 4.). Da sowohl Π als auch ψu_l $(l = 1, \ldots, m)$ stetige Ableitungen erster Ordnung haben, so genügt die rechte Seite von (126) gewiß einer H-Bedingung. Da ψ stetige Ableitungen (übrigens aller Ordnungen) hat, so erfüllt auch Θ eine H-Bedingung, und es gilt wegen (115) und (124)

$$(127)\qquad |\Theta|_\nu \leqq A_2(\nu)\,(\Omega^2 + \Omega\Omega_1).$$

Das Potential $\int_S \frac{f'}{\varrho}\Theta'\,d\sigma'$ hat nunmehr aber stetige Ableitungen erster Ordnung. Eine sinngemäße Wiederholung der zuletzt durchgeführten Überlegungen lehrt, daß $\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}$ existieren, sich auf S stetig verhalten und Ungleichheiten der Form

$$(128)\qquad \left|\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right|,\ \left|\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}\right| \leqq A_3(\Omega^2 + \Omega\Omega_1)$$

erfüllen. Indem wir $A = \mathrm{Max}\,(A_1, A_3)$ setzen, können wir für (124) und (128) auch schreiben

$$(129)\qquad |\Theta|,\ \left|\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right|,\ \left|\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}\right| \leqq A(\Omega^2 + \Omega\Omega_1).$$

Wir finden weiter

$$\psi(\Theta - \dot\Theta) = \Pi\{\lambda,\zeta\} - \Pi\{\lambda,\dot\zeta\} - \int_S \frac{f'}{\varrho}(\Theta' - \dot\Theta')\,d\sigma'$$
$$+ \sum_{l=1}^{m}\psi u_l \int_S f'\psi' u_l'(\Theta' - \dot\Theta')\,d\sigma',$$

und darum ähnlich wie vorhin

$$(130)\qquad |\Theta-\dot{\Theta}|,\ \left|\frac{\partial}{\partial\xi}(\Theta-\dot{\Theta})\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial\eta}(\Theta-\dot{\Theta})\right| \leqq \boldsymbol{B}(\Omega+\Omega_1)\mho.$$

Wir wenden uns jetzt der Integro-Differentialgleichung (100) zu und versuchen, sie durch sukzessive Approximationen aufzulösen. Wir setzen

$$(131)\qquad \begin{aligned} \psi\zeta_1+\int_S f'\mathfrak{N}\zeta_1' d\sigma' &= s-R^2\lambda+\sum_{l=1}^{m}\psi r_l u_l,\\ \psi\zeta_2+\int_S f'\mathfrak{N}\zeta_2' d\sigma' &= s-R^2\lambda+\sum_{l=1}^{m}\psi r_l u_l+\Pi\{\lambda,\zeta_1\},\\ \psi\zeta_3+\int_S f'\mathfrak{N}\zeta_3' d\sigma' &= s-R^2\lambda+\sum_{l=1}^{m}\psi r_l u_l+\Pi\{\lambda,\zeta_2\},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Schreibt man zur Abkürzung

$$(132)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{\psi}(s-R^2\lambda)+\sum_{l=1}^{m} r_l u_l-\int_S \mathfrak{H}(\sigma,\sigma')\frac{1}{\psi'}(s'-R'^2\lambda)\,d\sigma' \\ = \mathsf{P}(s,\lambda,r_1,\ldots,r_m)=\mathsf{P}, \end{aligned}$$

so lautet die Lösung der nichthomogenen Integralgleichung

$$(133)\qquad \psi\zeta+\int_S f'\mathfrak{N}\zeta' d\sigma' = s-R^2\lambda+\sum_{l=1}^{m}\psi r_l u_l+\Pi\{\lambda,\bar{\zeta}\},$$

unter $\bar{\zeta}$ eine gegebene, nebst ihren Ableitungen $\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\eta}$ stetige und einer zu (65) analogen Ungleichheit genügende Ortsfunktion verstanden,

$$(134)\qquad \zeta=\mathsf{P}+\Theta\{\lambda,\bar{\zeta}\}.$$

Nunmehr folgt aus (131)

$$(135)\qquad \begin{aligned} \zeta_1 &= \mathsf{P},\\ \zeta_2 &= \mathsf{P}+\Theta\{\lambda,\zeta_1\},\\ \zeta_3 &= \mathsf{P}+\Theta\{\lambda,\zeta_2\},\\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Den Entwicklungen auf S. 57 gemäß hat ζ_1 gewiß stetige partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf ξ und η. Ist, wie wir zunächst annehmen wollen,

$$(136)\qquad |\zeta_1|,\ \left|\frac{\partial\zeta_1}{\partial\xi}\right|,\ \left|\frac{\partial\zeta_1}{\partial\eta}\right| \leqq \varepsilon,$$

so hat auch ζ_2 stetige Ableitungen erster Ordnung. Erfüllt die zweite Näherung Ungleichheiten, die zu (136) analog sind, so hat die dritte Näherung ζ_3 stetige Ableitungen $\frac{\partial\zeta_3}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\zeta_3}{\partial\eta}$ usw. Es ist jetzt nicht schwer zu zeigen, daß, wenn Ω_1 hinreichend klein gewählt wird, die sukzessiven Näherungen unbegrenzt fortgeführt werden können.

Vor allem überzeugt man sich leicht, daß

$$(137) \qquad |\mathsf{P}|, \quad \left|\frac{\partial \mathsf{P}}{\partial \xi}\right|, \quad \left|\frac{\partial \mathsf{P}}{\partial \eta}\right| \leqq \alpha_1 \Omega_1$$

gesetzt werden kann, unter α_1 eine Konstante verstanden wie später unter $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Betrachten wir jetzt die quadratische Gleichung

$$(138) \qquad \pi = \alpha_1 \Omega_1 + \boldsymbol{A}(\pi^2 + \pi \Omega_1).$$

Sie hat, wenn Ω_1 hinreichend klein ist, zwei positive Wurzeln; die kleinere, sie heiße π_*, konvergiert mit Ω_1 zugleich gegen Null. Es gilt also

$$(139) \qquad \pi_* = \alpha_1 \Omega_1 + \boldsymbol{A}(\pi_*^2 + \pi_* \Omega_1).$$

Wir wählen Ω_1 so klein, etwa $\Omega_1 \leqq d_1$, daß $\pi_* \leqq \varepsilon$ wird.

Nach (135) und (137) finden wir nunmehr vor allem, wenn wir $\Omega_1 \leqq d_1$ annehmen,

$$(140) \qquad \operatorname{Max}\left\{|\zeta_1|, \left|\frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta}\right|\right\} \leqq \alpha_1 \Omega_1 < \pi_* \leqq \varepsilon.$$

Aus (135), (129) und (137) folgt, da diesmal für Ω offenbar π_* zu setzen ist,

$$(141) \qquad \operatorname{Max}\left\{|\zeta_2|, \left|\frac{\partial \zeta_2}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial \zeta_2}{\partial \eta}\right|\right\} \leqq \alpha_1 \Omega_1 + \boldsymbol{A}(\pi_*^2 + \pi_* \Omega_1) = \pi_* \leqq \varepsilon.$$

Ebenso findet man

$$(142) \qquad \operatorname{Max}\left\{|\zeta_3|, \left|\frac{\partial \zeta_3}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial \zeta_3}{\partial \eta}\right|\right\} \leqq \pi_* \leqq \varepsilon, \ldots.$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Und nun der Konvergenzbeweis. Aus

$$(143) \qquad \zeta_n = \mathsf{P} + \Theta\{\lambda, \zeta_{n-1}\} \quad \text{und} \quad \zeta_{n+1} = \mathsf{P} + \Theta\{\lambda, \zeta_n\}$$

folgt mit $\mathfrak{z}_n = \zeta_{n+1} - \zeta_n$,

$$(144) \qquad \mathfrak{z}_n = \Theta\{\lambda, \zeta_n\} - \Theta\{\lambda, \zeta_{n-1}\},$$

darum nach (130), da diesmal für Ω und Ω_1 entsprechend π_* und d_1 eintreten,

$$(145) \qquad \operatorname{Max}\left\{|\mathfrak{z}_n|, \left|\frac{\partial \mathfrak{z}_n}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial \mathfrak{z}_n}{\partial \eta}\right|\right\} \leqq \boldsymbol{B}(\pi_* + d_1) \cdot \operatorname{Max}\left\{|\mathfrak{z}_{n-1}|, \left|\frac{\partial \mathfrak{z}_{n-1}}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial \mathfrak{z}_{n-1}}{\partial \eta}\right|\right\} \qquad (n \geqq 2).$$

Da π_* mit Ω_1 gegen Null geht, so kann man Ω_1 so klein wählen, etwa $\Omega_1 \leqq d_2 \leqq d_1$, daß $\pi_* \leqq \varepsilon^*$ und

$$(146) \qquad \boldsymbol{B}(\varepsilon^* + d_2) \leqq q < 1$$

wird. Man sieht jetzt ohne weiteres, daß die unendlichen Reihen

$$(147) \qquad \begin{gathered} \zeta_1 + (\zeta_2 - \zeta_1) + \ldots, \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi}(\zeta_2 - \zeta_1) + \ldots, \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta}(\zeta_2 - \zeta_1) + \ldots \end{gathered}$$

gleichmäßig wie geometrische Reihen konvergieren. Die Funktion

$$\zeta = \zeta_1 + (\zeta_2 - \zeta_1) + \cdots \tag{148}$$

hat augenscheinlich stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, genügt den Ungleichheiten

$$|\zeta|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right| \leqq \varepsilon^* \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_0 \tag{149}$$

und erfüllt, wie man sich leicht überzeugt, die Integro-Differentialgleichung (100). Aus (116) folgt zunächst, wenn man $\dot{\zeta} = \zeta_n$ und etwa $\sigma = \text{Max}|\zeta - \zeta_n|$ setzt,

$$\Pi\{\lambda, \zeta_n\} \to \Pi\{\lambda, \zeta\} \tag{150}$$

für $n \to \infty$, und zwar für alle $|s|, |\lambda|, |r_1|, \ldots, |r_m| \leqq d_2$ und alle (ξ, η) auf S gleichmäßig. Die Beziehung

$$\psi \zeta_n + \int_S f' \mathfrak{R} \zeta_n' \, d\sigma' = s - R^2 \lambda + \sum_{l=1}^{m} \psi \, r_l \, u_l + \Pi\{\lambda, \zeta_{n-1}\} \tag{151}$$

ergibt aber nach Grenzübergang in der Tat die Gleichung (100). *Die gefundene Lösung ist die einzige, die für alle* $|s|, |\lambda|, |r_1|, \ldots, |r_m| \leqq d_2$ *der Ungleichheit* (149) *genügt.* Wäre nämlich $\tilde{\zeta}$ eine andere ebenso beschaffene Lösung, so würden wir aus

$$\tilde{\zeta} = \mathsf{P} + \Theta\{\lambda, \tilde{\zeta}\} \quad \text{und} \quad \zeta_n = \mathsf{P} + \Theta\{\lambda, \zeta_{n-1}\} \tag{152}$$

nach (130), wenn wir zur Abkürzung

$$\text{Max}\left\{|\tilde{\zeta} - \zeta_n|, \left|\frac{\partial}{\partial \xi}(\tilde{\zeta} - \zeta_n)\right|, \left|\frac{\partial}{\partial \eta}(\tilde{\zeta} - \zeta_n)\right|\right\} = \mathfrak{t}_n \tag{153}$$

setzen,

$$\mathfrak{t}_n \leqq \boldsymbol{B}(\varepsilon^* + d_2)\, \mathfrak{t}_{n-1} \tag{154}$$

erhalten. Wegen (146) ist augenscheinlich

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{t}_n = 0, \quad \text{darum} \quad \tilde{\zeta} = \zeta, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Den vorstehenden Betrachtungen lag die Integro-Differentialgleichung (75) zugrunde. Es liegt auf der Hand, daß sich nichts Wesentliches ändert, wenn wir von der Integro-Differentialgleichung (81) ausgehen, d. h. annehmen, daß die Winkelgeschwindigkeit eine vorgegebene Funktion des Abstandes von der Rotationsachse ist (vgl. die Fußnote [50]).

Die Funktionen der Folge ζ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *sind für alle reellen oder komplexen* $\lambda, s_1, \ldots, s_q, r_1, \ldots, r_m$[55] *in dem Gebiete* $|\lambda|, |s_1|, \ldots, |r_m| < d_2$ *analytische und reguläre Funktionen der obigen Parameter.*

---

[55] Wir bezeichnen mit $s_1, \ldots, s_q$ die Werte der abteilungsweise konstanten Funktion s auf ${}_1S, \ldots, {}_qS$.

Betrachten wir den auf S. 43 eingeführten Ausdruck

$$(155)\qquad J=\int\limits_S \frac{f'}{\varrho_t}\sum A_t'(a'\zeta'-a\zeta)\,d\xi'\,d\eta'=\lim_{\bar D\to 0}\int\limits_{S-\bar S}$$

und nehmen wir an, daß ζ eine in gewissen Kreisgebieten um den Koordinatenursprung erklärte analytische und reguläre Funktion der komplexen Parameter $v_1,\ldots,v_h$ sei. Das gleiche gilt dann, wie unter Zuhilfenahme des Cauchyschen Integrals unmittelbar gezeigt werden kann, auch für $\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}$.[56] Das Integral $\int\limits_{S-\bar S}$ ist in t und $v_1,\ldots,v_h$ analytisch und regulär, und da der Grenzübergang gleichmäßig ist, so gilt das gleiche auch für J. Auch die Differentialquotienten $\frac{\partial^n V_t}{\partial t^n}=\frac{\partial^{n-1}J}{\partial t^{n-1}}$ sind in $v_1,\ldots,v_h$ und t analytisch und regulär. In der Entwicklung

$$(156)\qquad \varkappa(V_1-V)=V^{(1)}+V^{(2)}+V^{(3)}+\ldots$$

sind mithin alle Funktionen $V^{(n)}$ $(n=1,2,\ldots)$ in bezug auf $v_1,\ldots,v_h$ analytisch und regulär. Die Reihe konvergiert unbedingt und gleichmäßig. Demnach ist auch der Ausdruck $V^{(2)}+V^{(3)}+\ldots$ in bezug auf $v_1,\ldots,v_h$ analytisch und regulär.

Aus (135) folgt ohne weiteres, daß ζ_1 in bezug auf $\lambda, s_1,\ldots,s_q, r_1,\ldots,r_m$ analytisch ist. Nach dem soeben Bewiesenen gilt das gleiche für $\Pi\{\lambda,\zeta_1\}$; für $v_1,\ldots,v_h$ sind diesmal $\lambda, s_1,\ldots,s_q, r_1,\ldots,r_m$ einzuführen. Auch der Ausdruck

$$(157)\qquad \int\limits_S \frac{1}{\psi'}\,\mathfrak{H}\,\Pi'\{\lambda,\zeta_1'\}\,d\sigma'=\lim_{\bar D\to 0}\int\limits_{S-\bar S}\frac{1}{\psi'}\,\mathfrak{H}\,\Pi'\{\lambda,\zeta_1'\}\,d\sigma',$$

demnach auch ζ_2 ist in bezug auf $\lambda, s_1,\ldots,s_q, r_1,\ldots,r_m$ analytisch. Man überzeugt sich jetzt nacheinander, daß alle ζ_n dieselbe Eigenschaft haben. Das gleiche gilt des gleichmäßigen Grenzüberganges halber auch für $\zeta=\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n$.

Es sei

$$(158)\qquad \zeta=\sum a_{\nu_0\ldots\nu_{q+m}}\lambda^{\nu_0}s_1^{\nu_1}\ldots s_q^{\nu_q}r_1^{\nu_{q+1}}\ldots r_m^{\nu_{q+m}}.$$

Aus der Cauchyschen Integraldarstellung folgt, daß die Funktionen $a_{\nu_0\ldots\nu_{q+m}}$ in bezug auf ξ und η stetig sind und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Die unendliche Reihe (158) kann gliedweise differentiiert werden[57].

Führt man in (100) für ζ den Ausdruck (158) ein, so gewinnt man Beziehungen zur Bestimmung der Funktionen $a_{\nu_0\ldots\nu_{q+m}}$. Gesetzt,

---

[56] Vgl. die analogen Ausführungen auf S. 45.

[57] Vgl. loc. cit. [42] b) S. 163 sowie die Ausführungen auf S. 45. Dort handelt es sich um ganz analoge Betrachtungen.

die Funktionen $a_{\nu_0 \dots \nu_{q+m}}$ $(\nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_{q+m} \leqq n)$ seien bereits ermittelt. Man erhält dann zur Bestimmung der Koeffizienten $a_{\nu_0 \dots \nu_{q+m}}$ $(\nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_{q+m} = n+1)$ Integralgleichungen von der Form

$$\psi\, a_{\nu_0 \dots \nu_{q+m}} + \int_S f' \,\mathfrak{N}\, a'_{\nu_0 \dots \nu_{q+m}} d\sigma' = A_{\nu_0 \dots \nu_{q+m}} . \tag{159}$$

Der Ausdruck $A_{\nu_0 \dots \nu_{q+m}}$ ist der Koeffizient von $\lambda^{\nu_0} s_1^{\nu_1} \dots s_q^{\nu_q} r_1^{\nu_{q+1}} \dots r_m^{\nu_{q+m}}$ $(\nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_{q+m} = n+1)$ in dem Polynom, das man erhält, wenn man in

$$s - R^2 \lambda + \sum_{l=1}^{m} \psi\, r_l\, u_l + \Pi\{\lambda, \zeta\}$$

für ζ das Polynom

$$\sum a_{\nu_0 \dots \nu_{q+m}} \lambda^{\nu_0} s_1^{\nu_1} \dots r_m^{\nu_{q+m}} \qquad (\nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_{q+m} \leqq n)$$

einsetzt. Die Integralgleichung (159) bestimmt $a_{\nu_0 \dots \nu_{q+m}}$ vollständig.

Anstatt, wie es in dem Vorstehenden geschehen ist, von den sukzessiven Approximationen auszugehen und die Entwicklung (158) nach Potenzen der Parameter auf funktionentheoretischem Wege abzuleiten, könnte man der Betrachtung von vornherein eine Darstellung von der Form (158) zugrunde legen und den Konvergenzbeweis nach einer Majorantenmethode durchzuführen versuchen. Diesen Weg ist Liapounoff bei seinen Untersuchungen gegangen. Wie bei der Ableitung der fundamentalen Integro-Differentialgleichung (11) verläßt Liapounoff auch bei dem Konvergenzbeweis nirgends das Gebiet des Reellen.

10. Diskussion der Verzweigungsgleichungen. Damit die von uns vorhin gefundene Lösung der Integro-Differentialgleichung (100) der fundamentalen Integro-Differentialgleichung des Problems (75) genüge, müssen noch die Verzweigungsgleichungen

$$r_l + \int_S f' \psi' u'_l \zeta' d\sigma' = 0 \qquad (l = 1, \dots, m) \tag{160}$$

erfüllt sein. Hat, wie wir zunächst annehmen wollen, T eine Symmetrieebene durch die z-Achse, die wir zur Ebene $y=0$ wählen, jedoch keine Rotationssymmetrie um diese Achse und sind nur bezüglich der Ebenen $z=0$ und $y=0$ symmetrische nichttriviale Nullösungen vorhanden, so sind diejenigen beiden Gleichungen (160), die zu den Werten $l=1$ und 2 gehören, identisch, d. h. für alle Werte von $r_3, \dots, r_m$, erfüllt, wenn man $r_1 = r_2 = 0$ setzt. Mehr als dies, sind die Nullösungen $u_3, u_4, \dots, u_{m_1}$ $(m_1 \leqq m)$ so beschaffen, daß sie beim Übergang von σ zu σ_* oder zu σ^* in den entgegengesetzten Wert übergehen, während $u_{m_1+1}, \dots, u_m$ beim Übergang von σ zu σ_* und σ^* unverändert bleiben, so werden alle Gleichungen (160), die zu den Werten $l = 1, \dots, m_1$ gehören, identisch erfüllt sein, sobald man $r_1 = r_2 = \dots = r_{m_1} = 0$ setzt. Es erweisen sich nämlich, wie man leicht sieht, alle sukzessiven Näherungen und darum auch die Lösung ζ in bezug auf die Ebenen $z=0$

und $y = 0$ als symmetrisch,

$$\zeta(\sigma) = \zeta(\sigma_*) = \zeta(\sigma^*).\text{[58]} \tag{161}$$

Augenscheinlich sind darum die ersten m_1 Gleichungen (160) tatsächlich erfüllt. Ob es neben den gefundenen Lösungen weitere Lösungen gibt, bleibt dahingestellt (vgl. die Ausführungen auf S. 67).

Hat insbesondere T Rotationssymmetrie um die z-Achse, so ist $u_2 \equiv 0$, $r_2 = 0$, während die von u_1 linear unabhängigen Nullösungen entweder von der Gestalt $\mathfrak{F}(\mathfrak{s})$ sind oder sich zu Gruppen von der Form $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \cos k\mathfrak{d}$, $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin k\mathfrak{d}$ vereinigen lassen. Es möge der Einfachheit halber nur ein Paar von Lösungen u_3 und u_4 der zuletzt genannten Art vorhanden sein. Wir nehmen an, daß $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s})$ in bezug auf die Ebene $z = 0$ symmetrisch ist. Wie wir gleich zeigen werden, *haben jetzt alle Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft von T mindestens eine durch die z-Achse hindurchgehende Symmetrieebene.* Wir brauchen im vorliegenden Falle diese Eigenschaft nicht als eine besondere Annahme oder Forderung einzuführen.

Es möge zunächst

$$\int_S \psi \zeta \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin k\mathfrak{d}\, d\sigma \neq 0, \quad \text{hingegen} \quad \int_S \psi \zeta \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \cos k\mathfrak{d}\, d\sigma = 0$$

sein. Wir setzen

$$\mathfrak{d} = \frac{\pi}{2k} + \bar{\mathfrak{d}}.$$

Die Funktionen $\mathfrak{F}(\mathfrak{s}) \cos k\bar{\mathfrak{d}}$ und $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin k\bar{\mathfrak{d}}$ sind Nullösungen der Integralgleichung (83). Offenbar ist $\int_S \psi \zeta \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin k\bar{\mathfrak{d}}\, d\sigma = 0$. Aus der Integro-Differentialgleichung (100) folgt, daß die Ebene $\bar{\mathfrak{d}} = 0$, d. h. $\mathfrak{d} = \frac{\pi}{2k}$ eine Symmetrieebene der Figur T_1 ist.

Es sei jetzt ferner

$$\int_S \psi \zeta \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin k\mathfrak{d}\, d\sigma \neq 0, \qquad \int_S \psi \zeta \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \cos k\mathfrak{d}\, d\sigma \neq 0.$$

Wir wählen $k\alpha_0$ so, daß $\int_S \psi \zeta \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin k(\mathfrak{d} + \alpha_0)\, d\sigma = 0$ ausfällt. Setzt man $\mathfrak{d} + \alpha_0 = \bar{\mathfrak{d}}$, so findet man wie vorhin, daß die Ebene $\mathfrak{d} = -\alpha_0$ eine Symmetrieebene der Figur T_1 ist. Jetzt ist $\int_S \psi \zeta \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin k\bar{\mathfrak{d}}\, d\sigma = 0$. *Wir kommen in allen Fällen zu dem Resultat, daß es hier möglich ist, die Figur T_1 so zu orientieren, daß $r_4 = 0$ wird, daß mithin T_1 die Ebene $y = 0$ zur Symmetrieebene hat.*

---

[58] Man beachte, daß, wenn ζ_n die betrachteten Symmetrieeigenschaften hat, diese auch den zugehörigen Funktionen V_1, V, $V^{(1)}$, somit auch $\Psi\{\zeta_n\}$ und $\Pi\{\lambda, \zeta_n\}$ zukommen. Da $\mathfrak{R}(\sigma, \sigma') = \mathfrak{R}(\sigma_*, \sigma'_*) = \mathfrak{R}(\sigma^*, \sigma^{*\prime})$ folglich auch $\mathfrak{H}(\sigma, \sigma') = \mathfrak{H}(\sigma_*, \sigma'_*) = \mathfrak{H}(\sigma^*, \sigma^{*\prime})$ ist, so gilt auch $\zeta_{n+1}(\sigma) = \zeta_{n+1}(\sigma_*) = \zeta_{n+1}(\sigma^*)$. Übrigens sind auch alle Koeffizienten $\alpha_{\nu_0 \ldots \nu_{q+m}}$ $(\nu_{q+1} = \ldots = \nu_{q+m_1} = 0)$ in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch.

Wie wir wissen, ist die Ebene $z = 0$ allemal eine Symmetrieebene der Konfiguration, so daß man, auch wenn eine Symmetrieebene durch die Rotationsachse nicht existiert, stets $r_1 = 0$ setzen und erwarten kann, daß sich die Anzahl der Gleichungen auf $(m - 1)$ reduziert. Wie E. Hölder zeigte[59], *bestehen zwischen den m Gleichungen zwei identische lineare Beziehungen, so daß sich die Anzahl der Verzweigungsgleichungen stets auf $m - 2$ zurückführen läßt.* Wir schließen uns in dem Folgenden der Darstellung von Herrn E. Hölder an.

Wird, wie auf S. 57, zur Abkürzung

$$s - R^2 \lambda + \Pi\{\lambda, \zeta\} = \Pi\{\lambda, s, \zeta\} \tag{162}$$

gesetzt, so findet man aus (100) für alle $\lambda, s_1, \ldots, s_q, r_1, \ldots, r_m$

$$\psi \zeta + \int\limits_S \frac{f'}{\varrho} \zeta' \, d\sigma' - \Pi\{\lambda, s, \zeta\} = \sum_{l=1}^{m} \psi u_l \left(r_l + \int\limits_S f' \psi' u_l' \zeta' \, d\sigma' \right), \tag{163}$$

wo in den Klammern rechts die linken Seiten der Verzweigungsgleichungen (160) erscheinen. Multipliziert man rechts und links mit $f u_k$ und integriert über S, so erhält man wegen

$$\int\limits_S f \psi u_k \zeta \, d\sigma + \int\limits_S f u_k \, d\sigma \int\limits_S \frac{f'}{\varrho} \zeta' \, d\sigma' = \int\limits_S f \zeta \, d\sigma \left(\psi u_k + \int\limits_S \frac{f'}{\varrho} u_k' \, d\sigma' \right) = 0 \tag{164}$$

zunächst

$$\Pi_k = \int\limits_S f u_k \Pi\{\lambda, s, \zeta\} \, d\sigma = r_k + \int\limits_S f' \psi' u_k' \zeta' \, d\sigma'. \tag{165}$$

Nach (165), (162), (75) und (158) erhalten wir für die Verzweigungsgleichung $\Pi_k = 0$ einen Ausdruck von der Form

$$\begin{gathered} \lambda \int\limits_S f R^2 u_k \, d\sigma - \sum_{j=1}^{q} s_j f_j \int\limits_{jS} u_k \, d\sigma + \mathfrak{P}_k(\lambda; s_1, \ldots, s_q; r_1, \ldots, r_m) = 0, \\ \mathfrak{P}_k = \sum B_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_{q+m}} \lambda^{\nu_0} s_1^{\nu_1} \ldots r_m^{\nu_{q+m}} \qquad (\nu_0 + \nu_1 + \ldots + \nu_{q+m} > 1); \end{gathered} \tag{166}$$

weiter ist nach (163) und (165)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varkappa} U_1(X_1, Y_1, Z_1) - \frac{1}{\varkappa} U(X, Y, Z) - s &= \frac{1}{\varkappa} U_1(X_1, Y_1, Z_1) - C_1 \\ &= \psi \zeta + \int\limits_S \frac{f'}{\varrho} \zeta' \, d\sigma' - \Pi\{\lambda, s, \zeta\} = \psi \sum_{l=1}^{m} u_l \Pi_l, \end{aligned} \tag{167}$$

unter C_1 eine gewisse auf S erklärte, abteilungsweise konstante Funktion verstanden. Multipliziert man rechts und links mit $f c_1$ (c_1 = Kosinus des von der Normale zu S_1 mit der z-Achse eingeschlossenen Winkels)

---

[59] Vgl. E. Hölder, a) Beiträge zur mathematischen Theorie der Gestalt des Erdmondes, Sächsische Berichte **78** (1926), S. 21—36, insb. S. 26; b) Mathematische Untersuchungen zur Himmelsmechanik **31** (1929), S. 197—257, insb. S. 206—209.

und integriert über S_1, so findet man wegen

$$(168)\qquad \int\limits_{S_1} f\, U_1(X_1, Y_1, Z_1)\, c_1\, d\sigma_1 = \int\limits_{T_1} f \frac{\partial U_1}{\partial z_1} d\tau_1 = \varkappa \int\limits_{T_1} f \frac{\partial V_1}{\partial z_1} d\tau_1 = 0$$
$$\text{und}\quad C_1 \int\limits_{S_1} f\, c_1\, d\sigma_1 = 0$$

die Identität

$$(169)\qquad \sum_l \Pi_l \int\limits_{S_1} f\, \psi\, u_l\, c_1\, d\sigma_1 = 0.\ [60]$$

Ebenso findet man, wenn T keine Rotationssymmetrie um die z-Achse hat, die weitere Identität

$$(170)\qquad \sum_l \Pi_l \int\limits_{S_1} f\, \psi\, u_l \gamma_1\, d\sigma_1 = 0 \qquad (\gamma_1 = X_1 b_1 - Y_1 a_1).$$

Die Determinante

$$(171)\qquad \begin{vmatrix} \int\limits_{S_1} f\, \psi\, u_1\, c_1\, d\sigma_1, & \int\limits_{S_1} f\, \psi\, u_2\, c_1\, d\sigma_1 \\ \int\limits_{S_1} f\, \psi\, u_1\, \gamma_1\, d\sigma_1, & \int\limits_{S_1} f\, \psi\, u_2\, \gamma_1\, d\sigma_1 \end{vmatrix}$$

konvergiert für $\lambda, s_1, \ldots, s_q, r_1, \ldots, r_m \to 0$ gegen

$$(172)\qquad \begin{vmatrix} \int\limits_S f\, \psi\, u_1\, c\, d\sigma, & \int\limits_S f\, \psi\, u_2\, c\, d\sigma \\ \int\limits_S f\, \psi\, u_1 \gamma\, d\sigma, & \int\limits_S f\, \psi\, u_2 \gamma\, d\sigma \end{vmatrix} = \int\limits_S f\, \psi\, u_1\, c\, d\sigma \int\limits_S f\, \psi\, u_2\, \gamma\, d\sigma,$$

und dieser Wert ist wegen $u_1 = \text{const.} \cdot c$, $u_2 = \text{const.} \cdot \gamma$ gewiß von Null verschieden. Für hinreichend kleine $|\lambda|$, $|s_1|, \ldots, |s_q|$, $|r_1|, \ldots, |r_m|$ ist also auch (171) von Null verschieden, und die Gleichungen (169) und (170) sind gewiß nach Π_1 und Π_2 auflösbar. Bei der Diskussion braucht man sich also um die Verzweigungsgleichungen $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$ gar nicht weiter zu kümmern; r_1 und r_2 kann man beliebige, dem absoluten Betrage nach hinreichend kleine Werte erteilen. Insbesondere darf man $r_1 = r_2 = 0$ setzen. Wäre $T_1^{(0)}$ eine Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft von T, die zu bestimmten Werten von $\lambda, s_1, \ldots, s_q$ gehört, und wäre $r_1^2 + r_2^2 > 0$, so könnte man, wie man sich ohne Mühe überzeugt, $T_1^{(0)}$ durch eine geeignete kleine Schraubung um die z-Achse in eine zu denselben Werten von $\lambda, s_1, \ldots, s_q$ gehörende Gleichgewichtsfigur T_1 überführen, so daß nunmehr $r_1 = r_2 = 0$ wird (vgl. loc. cit. [42] a) S. 250—251). Es sei $m > 2$, und es mögen $r_3, \ldots, r_m$ Werte bezeichnen, die sich durch Auflösung der Verzweigungsgleichungen $\Pi_3 = 0, \ldots, \Pi_m = 0$ ergeben. Jede zu einem so gewonnenen System von Parameterwerten gehörige Funktion bestimmt eine Gleichgewichtsfigur in der Nach-

[60] In (169) sind f, ψ, u_l $(l = 1, \ldots, m)$ als Ortsfunktionen auf S_1 aufzufassen.

barschaft von T. *Alle* Gleichgewichtsfiguren dieser Art und damit die vollständige Lösung des vorgelegten Problems erhält man durch eine beliebige Schraubung in der Umgebung von T.

Ist insbesondere $m = 2$, d. h. hat die Integralgleichung (83) lediglich die trivialen Nullösungen u_1 und u_2, so erübrigt sich eine Diskussion der Verzweigungsgleichungen. Zu jedem hinreichend kleinen Werte von $|\lambda|, |s_1|, \ldots, |s_q|$ gehört eine, bis auf die vorerwähnten Schraubungen um die z-Achse vollkommen bestimmte Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft von T (der „reguläre" Fall). Hier bleibt evtl. nur noch die Frage zu beantworten, ob man $s_1, \ldots, s_q$ so bestimmen kann, daß die den Gebieten ${}_1T, {}_2T, \ldots, {}_qT$ zugeordneten Massen der neuen Flüssigkeitsverteilung vorgeschriebene Volumina in der Umgebung der Ausgangsvolumina haben. Wir werden auf diesen Gegenstand in einem anderen Zusammenhang etwas später zurückkommen und bemerken im Augenblick, daß man zu den Verzweigungsgleichungen

$$\Pi_1 = 0, \ldots, \Pi_m = 0 \tag{173}$$

auch noch auf einem anderen Wege, ohne die auf S. 54 in Anlehnung an E. Schmidt benutzte Kernzerspaltung, gelangen kann. Die fundamentale Integro-Differentialgleichung (75), die wir jetzt in der Form

$$\zeta + \frac{1}{\psi}\int\limits_S \frac{f'}{\varrho}\zeta' d\sigma' = \frac{1}{\psi}\Pi\{\lambda, s, \zeta\} \tag{174}$$

schreiben können, hat nach bekannten Sätzen Lösungen nur dann, wenn die Integralbeziehungen

$$\Pi_k = \int\limits_S f u_k \Pi\{\lambda, s, \zeta\} d\sigma = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{175}$$

erfüllt sind[61]. Die Lösung erscheint in der Form

$$\zeta = \frac{1}{\psi}\Pi\{\lambda, s, \zeta\} - \int\limits_S \mathfrak{H}(\sigma, \sigma')\frac{1}{\psi'}\Pi'\{\lambda, s', \zeta'\} + \sum_{l=1}^{m} r_l u_l, \tag{176}$$

unter $\mathfrak{H}(\sigma, \sigma')$ eine Pseudoresolvente des Kernes $\frac{f'}{\psi\varrho}$ (vgl. die Fußnote [54]), unter r_l Parameter verstanden, die den Beziehungen (175) gemäß zu bestimmen sind. Wir haben augenscheinlich die Verzweigungsgleichungen (173) wieder gewonnen. Den zuletzt angegebenen Weg ist Liapounoff in seinen Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Ellipsoide gegangen.

Vorhin war von dem „regulären" Fall die Rede. Jedem System dem absoluten Betrage nach hinreichend kleiner Werte von $\lambda, s_1, \ldots, s_q$ entspricht im wesentlichen, d. h. abgesehen von den möglichen Schraubungen, *eine* Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft von T. Das

---

[61] Man beachte, daß $f\psi u_k$ Nullösungen der zu $\zeta + \frac{1}{\psi}\int\limits_S \frac{f'}{\varrho}\zeta' d\sigma' = 0$ adjungierten Integralgleichung sind.

gleiche gilt, falls T die Ebenen $z=0$ und $y=0$ zu Symmetrieebenen hat, wenn es ein vollständiges System nichttrivialer Nullösungen gibt, die beim Übergang von σ zu σ_* oder aber zu σ^* allemal den Faktor -1 erhalten. Denn jetzt kann man $r_1 = \ldots = r_m = 0$ setzen und da, wie wir schon früher gesehen haben, sich $\zeta(\sigma) = \zeta(\sigma_*) = \zeta(\sigma^*)$ ergibt, so sind alle Verzweigungsgleichungen erfüllt. Ob damit auch alle Lösungen des Problems gefunden werden, ist allerdings eine Frage für sich[62].

Im allgemeinen bringt erst eine Diskussion der $m-2$ Verzweigungsgleichungen $\Pi_3 = 0, \ldots, \Pi_m = 0$ einen Aufschluß über die Existenz, Realität und Vielfachheit der gesuchten Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft von T. Um einen Begriff über die Mannigfaltigkeit der möglichen Fälle zu geben, wollen wir im folgenden den besonders einfachen Spezialfall einer aus einem einzigen Flüssigkeitskörper bestehenden Gleichgewichtsfigur ($q=1$) mit zwei Symmetrieebenen und nur einer nichttrivialen, in bezug auf die Ebenen $y=0$ und $z=0$ symmetrischen Nullösung einer näheren Betrachtung unterziehen[63]. Es kann sich dabei zunächst um einen Körper handeln, der keine Rotationssymmetrie um die z-Achse hat. Dann ist $m=3$, $u_3(\sigma) = u_3(\sigma^*) = u_3(\sigma_*)$. Es kann ferner S ein Rotationskörper um die z-Achse sein. In diesem Falle (in dem, wie wir wissen, $u_2 \equiv 0$ ist) gibt es entweder eine einzige nichttriviale Nullösung der Form $\mathfrak{F}(\mathfrak{s})$ oder ein Paar von Lösungen der Form $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \cos k\mathfrak{d}$, $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin k\mathfrak{d}$. Wir nehmen im Einklang mit den obigen Festsetzungen an, daß $\mathfrak{F}(\mathfrak{s})$ und $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s})$ in bezug auf die Ebene $z=0$ symmetrisch sind, und setzen $k=2k_1$ voraus. In dem zuletzt genannten Falle wird von vornherein $r_4=0$ gesetzt, $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \cos k\mathfrak{d}$ ist die einzige nichttriviale, in bezug auf die Ebenen $y=0$ und $z=0$ symmetrische Nullösung[64].

Da $q=1$ ist, so darf man $s=0$ annehmen; ferner kann $r_1 = r_2 = 0$ gesetzt werden. Die einzige jetzt vorliegende Verzweigungsgleichung erhält damit nach (166) die Form

$$\text{(177)} \qquad \begin{gathered} \mathsf{A}\lambda + \mathfrak{P}(\lambda, r_3) = 0, \qquad \mathsf{A} = \int_S R^2 u_3 \, d\sigma, \\ \mathfrak{P}(\lambda, r_3) = \sum_{\mathfrak{i},\mathfrak{k}} B_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}} \lambda^{\mathfrak{i}} r_3^{\mathfrak{k}} \qquad (\mathfrak{i}+\mathfrak{k} > 1). \end{gathered}$$

---

[62] Vgl. die Ausführungen auf S. 63. Ob es Flüssigkeitskörper T dieser Art gibt, bleibt dahingestellt.

[63] Den allgemeinen Fall, daß T keine durch die z-Achse hindurchgehende Symmetrieebene hat, betrachten wir weiter unten S. 72.

[64] Man beachte, daß, wenn k ungerade ist, $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \cos k\mathfrak{d}$ in zwei in bezug auf die Ebene $x=0$, oder, was dasselbe ist, die Ebene $\mathfrak{d} = \frac{\pi}{2}$, symmetrischen Punkten entgegengesetzt gleiche Werte annimmt. Es gilt diesmal $\mathfrak{R} = \frac{1}{\varrho} - \psi\psi'(u_1 u_1' + u_3 u_3' + u_4 u_4')$. Man vergleiche in diesem Zusammenhang die auf die Formel (161) folgende Bemerkung.

Es sei zunächst $\mathsf{A} \neq 0$, und es gebe ein erstes λ nicht enthaltendes Glied $B_{0\mathfrak{k}} r_3^{\mathfrak{k}}$ ($\mathfrak{k} \geqq 2$) der Potenzreihe, das nicht verschwindet. Die Entwicklung von r_3 in der Umgebung des Wertes $\lambda = 0$ ist von der Form

$$r_3 = \left(-\frac{\mathsf{A}}{B_{0\mathfrak{k}}}\lambda\right)^{\frac{1}{\mathfrak{k}}} + \mathfrak{P}^{(1)}\left\{\left(-\frac{\mathsf{A}}{B_{0\mathfrak{k}}}\lambda\right)^{\frac{1}{\mathfrak{k}}}\right\}, \tag{178}$$

unter $\mathfrak{P}^{(1)}$ wie später unter $\mathfrak{P}^{(2)}, \mathfrak{P}^{(3)}, \ldots$ gewisse im Nullpunkt verschwindende Potenzreihen verstanden.

Ist $\mathfrak{k}$ eine gerade Zahl, so gibt es zwei reelle Reihen von Gleichgewichtsfiguren. Sie gehören zu denjenigen dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Werten von λ, deren Vorzeichen mit dem Vorzeichen von $-\frac{\mathsf{A}}{B_{0\mathfrak{k}}}$ übereinstimmt. Von der betrachteten Figur gehen für $\lambda \frac{\mathsf{A}}{B_{0\mathfrak{k}}} < 0$ zwei Arme von Gleichgewichtsfiguren aus.

Ist $\mathfrak{k}$ ungerade, so geht von T, wie man leicht sieht, für $\lambda > 0$ und für $\lambda < 0$ je ein Arm von Gleichgewichtsfiguren aus.

Es sei nunmehr $\mathsf{A} = 0$ und $B_{02} \neq 0$. Die Gleichung (177) nimmt jetzt die Gestalt an:

$$B_{02} r_3^2 + B_{11} r_3 \lambda + B_{20} \lambda^2 + \ldots = 0. \tag{179}$$

Sie hat, wenn $B_{11}^2 - 4 B_{02} B_{20} \neq 0$ ist, zwei Lösungen von der Form

$$\begin{aligned} r_3 &= \frac{1}{2 B_{02}}\left(-B_{11} + \sqrt{B_{11}^2 - 4 B_{02} B_{20}}\right)\lambda + \mathfrak{P}^{(2)}(\lambda), \\ r_3 &= \frac{1}{2 B_{02}}\left(-B_{11} - \sqrt{B_{11}^2 - 4 B_{02} B_{20}}\right)\lambda + \mathfrak{P}^{(3)}(\lambda). \end{aligned} \tag{180}$$

Ist der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv, so gibt es zwei sich in T kreuzende reguläre Reihen von Gleichgewichtsfiguren. Ist $B_{11}^2 - 4 B_{02} B_{20} < 0$, so gibt es in der Umgebung von T keine neuen (reellen) Gleichgewichtsfiguren; T ist eine isolierte Figur.

Sei endlich $B_{11}^2 - 4 B_{02} B_{20} = 0$, und es möge B_{20} nicht verschwinden. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit $B_{02} > 0$, demnach auch $B_{20} > 0$ annehmen. Für (179) können wir jetzt setzen

$$(\sqrt{B_{02}}\, r_3 + \sqrt{B_{20}}\, \lambda)^2 + \ldots = 0.$$

Wir führen hier

$$r_3 = -\frac{\sqrt{B_{20}}}{\sqrt{B_{02}}}\lambda + \frac{\bar{r}_3}{\sqrt{B_{02}}}$$

ein und erhalten

$$\bar{r}_3^2 + \ldots = 0. \tag{181}$$

Es sei $\bar{B}_{j0} \lambda^j$ das erste $\bar{r}_3$ nicht enthaltende Glied höherer Ordnung in (181), das nicht verschwindet. Es gilt

$$\bar{r}_3 = [-\bar{B}_{j0} \lambda^j]^{\frac{1}{2}} + \ldots \qquad (j \geqq 3),$$

demnach

$$(182)\qquad r_3 = -\frac{\sqrt{B_{20}}}{\sqrt{B_{02}}}\lambda + \frac{1}{\sqrt{B_{02}}}[-\bar{B}_{j0}\,\lambda^j]^{\frac{1}{2}} + \dots .$$

Ist $B_{20} = 0$, demnach auch $B_{11} = 0$, so finden wir einfacher

$$(183)\qquad r_3 = \left[-\frac{B_{j0}\lambda^j}{B_{02}}\right]^{\frac{1}{2}} + \dots .$$

Es möge jetzt zugleich $A = 0$, $B_{02} = 0$ ausfallen; hingegen seien $B_{11} \neq 0$, $B_{20} \neq 0$. Die erste nicht verschwindende Potenz von r_3 in (177) sei r_3^n $(n > 2)$. Die Gleichung (177) nimmt jetzt die Gestalt an

$$(184)\quad B_{11} r_3 \lambda + B_{0\,n} r_3^n + B_{0\,n_1} r_3^{n_1} + \dots + \lambda(B_{20}\lambda + B_{30}\lambda^2 + B_{12} r_3^2 + \dots) = 0.$$

Für r_3 erhält man die beiden Entwicklungen

$$(185)\qquad r_3 = -\frac{B_{20}}{B_{11}}\lambda + \mathfrak{P}^{(4)}(\lambda), \quad r_3 = \left[-\frac{B_{11}}{B_{0n}}\lambda\right]^{\frac{1}{n-1}} + \dots .$$

Die eine liefert eine reguläre Reihe von Gleichgewichtsfiguren, die andere zwei Arme von Figuren, die (für gerade n) den Werten von λ verschiedenen oder (für ungerade n) des gleichen Vorzeichens entsprechen.

Die vorstehenden Entwicklungen gelten, worauf zu Anfang dieser Nummer bereits hingewiesen wurde, sinngemäß auch, wenn T ein Rotationskörper um die z-Achse ist und die Integralgleichung (83) außer der trivialen Lösung u_1 (u_2 ist $\equiv 0$) nur noch ein Paar Nullösungen von der Form $u_3 = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s})\cos k\mathfrak{d}$, $u_4 = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s})\sin k\mathfrak{d}$, ($\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s})$ in bezug auf die Ebene $z = 0$ symmetrisch) hat. Wie wir wissen, hat man, da $r_4 = 0$ gemacht werden darf, hier so zu verfahren, wie wenn u_4 nicht vorhanden wäre, nur ist für $\mathfrak{N}$ der Ausdruck $\frac{1}{\varrho} - \psi\,\psi'\,(u_1 u_1' + u_3 u_3' + u_4 u_4')$ einzuführen. Wie wir jetzt zeigen wollen, bietet dieser Fall noch einige wichtige Eigentümlichkeiten dar.

Setzt man $r_3 = r_4 = 0$, so ergibt die Integro-Differentialgleichung (75), wie man leicht sieht, für ζ eine in bezug auf die Ebenen $z = 0$ und $\mathfrak{d} = \frac{n\pi}{2k}$ $(n = 0, 1, \dots, (2k-1))$ symmetrische Lösung. Es sei S_1 die Fläche $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$. Offenbar ist für diese, in der Tat, $r_3 = r_4 = 0$.

Wir denken uns jetzt die Koordinatenebenen $x = 0$ und $y = 0$ um irgendeinen Winkel $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ gedreht. Das neue Koordinatensystem heiße x', y', z. Die Integralgleichung (83) hat augenscheinlich ein System nichttrivialer Nullösungen, das in leicht ersichtlicher Schreibweise in der Form $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s})\cos k\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s})\sin k\mathfrak{d}'$ dargestellt werden kann. Wie man leicht sieht, folgt für T_1 aus $r_3 = r_4 = 0$ auch $r_3' = r_4' = 0$. Aus dem Eindeutigkeitssatz schließen wir, daß auch die Ebenen $\mathfrak{d}' = \frac{n\pi}{2k}$ $(n = 0, 1, \dots, (2k-1))$ Symmetrieebenen des Körpers sind. Also hat T_1 Rotationssymmetrie um die z-Achse.

Die Figur T gehört demnach einer regulären Reihe von Gleichgewichtsfiguren mit Rotationssymmetrie um die z-Achse an. Sie kann dabei zugleich den Ausgang für einen oder mehrere Arme weiterer Gleichgewichtsfiguren bilden. Man überzeugt sich ähnlich wie vorhin, daß diese Figuren k Symmetrieebenen $\mathfrak{d} = 0, \frac{\pi}{k}, \ldots, \frac{(k-1)\pi}{k}$ haben.

Offenbar muß im vorliegenden Falle die linke Seite der Verzweigungsgleichung (177) r_3 oder eine Potenz von r_3 als gemeinsamen Faktor enthalten. Mit anderen Worten ist jetzt

$$\mathsf{A} = 0, \quad B_{j0} = 0 \qquad (j > 1).$$

Ist $B_{02} \neq 0$, $B_{11} \neq 0$, so geht (177) nach Kürzung mit r_3 über in

$$B_{02} r_3 + B_{11} \lambda + \ldots = 0.$$

In T kreuzen sich zwei reguläre Reihen von Gleichgewichtsfiguren, von denen eine, wie wir soeben sahen, aus Rotationskörpern besteht.

Es sei jetzt weiter $B_{02} = 0$, $B_{11} \neq 0$, und es sei $B_{0n} r_3^n$ $(n > 2)$ das erste λ nicht enthaltende Glied, das nicht verschwindet. Die Gleichung (177) gibt nach Kürzung mit r_3

$$B_{11} \lambda + B_{0n} r_3^{n-1} + \ldots = 0.$$

Von T gehen außer der regulären Reihe von Körpern mit Rotationssymmetrie um die z-Achse noch zwei Arme von Gleichgewichtsfiguren mit den k Symmetrieebenen $\mathfrak{d} = 0, \frac{\pi}{k}, \ldots, \frac{(k-1)\pi}{k}$ aus.

Ist T ein Rotationskörper, hat ferner die Integralgleichung (83) *nichttriviale Nullösungen, die sämtlich von der Form $\mathfrak{F}(\mathfrak{s})$ ($\mathfrak{F}(\mathfrak{s})$ in bezug auf die Ebene $z = 0$ symmetrisch) sind, so sind alle Nachbarfiguren Rotationskörper um die z-Achse.*

Man gehe in der Tat von dem Koordinatensystem x, y, z zu dem System x', y', z über. Die Gleichgewichtsfigur T_1 genügt einer zu (100) analogen Integro-Differentialgleichung, in der $r_3' = r_3$, $r_4' = r_4$, ... gesetzt werden kann. Offenbar ist die Ebene $y' = 0$, demnach jede durch die z-Achse hindurchgehende Ebene eine Symmetrieebene des Körpers.

Es sei noch einmal T ein Rotationskörper, und es möge (83) ein und nur ein Paar nicht trivialer Nullösungen: $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \cos k\mathfrak{d}$, $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin k\mathfrak{d}$ ($\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s})$ in bezug auf die Ebene $z = 0$ symmetrisch) haben. Wie wir schon wissen, gehört T gewiß einer regulären Reihe von Gleichgewichtsfiguren mit Rotationssymmetrie um die z-Achse an. Wir nehmen ferner an, daß von T ein Arm von Gleichgewichtsfiguren Θ, die keine Rotationskörper um die z-Achse sind, ausgeht. Es sei $\overline{T}$ ein Körper aus Θ, und es sei $\bar{u}_2$ die einer Drehung um die z-Achse entsprechende triviale (normierte) Nullösung der zu $\overline{T}$ gehörigen zu (83) analogen Integralgleichung. Geht nun $\overline{T}$ in T stetig über, so konvergiert $\bar{u}_2$ gegen eine normierte Nullösung der Integralgleichung (83). Da nun $\bar{u}_2$ beim Übergang von σ

zu σ^* das Vorzeichen wechselt, so ist mithin

$$\lim_{\overline{T} \to T} \overline{u}_2 = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin k\,\mathfrak{d}.$$

Setzt man in naheliegender Schreibweise (vgl. S. 49)

$$\overline{\gamma} = \overline{X}\,\overline{b} - \overline{Y}\,\overline{a} = \overline{C}\,\overline{u}_2,$$

so ist offenbar

$$\lim_{\overline{T} \to T} \overline{C} = 0.$$

Sei jetzt T irgendeine Gleichgewichtsfigur, die die Ebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$ zu Symmetrieebenen hat, und es möge (83) nur eine nichttriviale Lösung u_3 haben. Diese sei in bezug auf die Ebenen $y=0$ und $z=0$ symmetrisch und nehme in den Punkten, die in bezug auf die Ebene $x=0$ symmetrisch liegen, entgegengesetzt gleiche Werte an. Die Figur T gehört sicher einer regulären Reihe von Gleichgewichtsfiguren an, die in bezug auf die Ebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$ symmetrisch sind. Man gewinnt sie, wie man leicht sieht, indem man in der Integro-Differentialgleichung (100) $r_3=0$ setzt.

Wir kehren jetzt zu der Verzweigungsgleichung (177) zurück und betrachten nur noch den weiteren besonderen Fall, daß A und alle B_{jl} verschwinden. Die Gleichung (177) ist alsdann identisch erfüllt. Die Funktion

$$(186)\quad \zeta = r_3 u_3 - \frac{1}{\psi} R^2 \lambda + \lambda \int\limits_S \mathfrak{H} \frac{1}{\psi'} R'^2 d\sigma' + \sum{}' b_{\nu_0 \mu_3} \lambda^{\nu_0} r_3^{\mu_3} \quad (\nu_0 + \mu_3 > 1)$$

erfüllt für alle hinreichend kleinen Werte von $|r_3|$ und $|\lambda|$ die Integro-Differentialgleichungen (100) und (75). Wie auf S. 38 ausgeführt, kann man durch eine Ähnlichkeitstransformation erreichen, daß alle aus (186) zu gewinnenden Gleichgewichtsfiguren dasselbe Volumen haben. *Zu einem jeden hinreichend kleinen Wert von* $|\lambda|$ *gehört demnach eine stetige Schar von Gleichgewichtsfiguren gleichen Volumens.* Setzt man in (186) insbesondere $\lambda=0$, so erhält man nach einer weiteren Überlegung ohne Mühe eine stetige Schar von Gleichgewichtsfiguren gleichen Volumens

$$(187)\qquad \zeta = r_3 \overline{b}_{00} + \sum_{\mu_3=2}^{\infty} \overline{b}_{0\mu_3} r_3^{\mu_3},$$

die zu dem Werte ω der Winkelgeschwindigkeit gehören und augenscheinlich nicht aus T durch eine Schraubung um die Rotationsachse abgeleitet worden sind.

Die Existenz einer so beschaffenen Schar von Gleichgewichtsfiguren ist also eine notwendige Bedingung dafür, daß der jetzt betrachtete besondere Fall eintreten kann. Gleichgewichtsfiguren dieser Art sind nicht bekannt. Bei den Maclaurinschen Ellipsoiden kommt dieser Fall, wie Liapounoff durch eine ins einzelne gehende Diskussion der Verzweigungsgleichung gezeigt hat, nicht vor[65].

[65] Vgl. A. Liapounoff, loc. cit. [39], Abh. b) S. 214—215, Abh. c) passim, insb. S. 2.

Zu analogen Resultaten gelangt man, wenn man allgemeiner $q > 1$, $m > 3$ annimmt.

Aus den soeben durchgeführten Betrachtungen folgt, daß gewiß $\mathsf{A} = \int\limits_S f R^2 u_3 \, d\sigma = 0$ ist, wenn T zu einer regulären Reihe von Gleichgewichtsfiguren gehört. Das gleiche gilt allgemeiner allemal, wenn $q = 1$, $m \geqq 3$ ist. Setzt man in (166) $s = 0$, $r_3 = \mathfrak{P}^{(3)}(\lambda), \ldots, r_m = \mathfrak{P}^{(m)}(\lambda)$, und geht man nach Division mit λ zur Grenze $\lambda = 0$ über, so findet man in der Tat

$$\int\limits_S f R^2 u_3 \, d\sigma = 0, \ldots, \int\limits_S f R^2 u_m \, d\sigma = 0. \tag{188}$$

Die Betrachtungen auf S. 67 ff. gelten sinngemäß, auch wenn T keine Symmetrieebene durch die z-Achse hat, sofern $m = 3$ ist. Denn auch jetzt dürfen wir $r_1 = r_2 = 0$ setzen, so daß die einzige in Betracht zu ziehende Verzweigungsgleichung die Form (177) erhält.

Im Anschluß daran sei noch auf einige Integraleigenschaften der Nulllösungen von (83) hingewiesen. Wir nehmen zunächst $q = 1$ an. Es gilt

$$\int\limits_S u_l \, d\sigma = 0 \qquad (l = 1, \ldots, m) \tag{189}$$

und, falls $\omega \neq 0$ ist,

$$\int\limits_S X u_l \, d\sigma = \int\limits_S Y u_l \, d\sigma = 0, \quad \int\limits_S X Z u_l \, d\sigma = \int\limits_S YZ u_l \, d\sigma = 0. \tag{190}$$ [66]

Ist aber $q > 1$, so tritt an Stelle von (189) die Beziehung

$$\sum_{j=1}^{q} {}_j\mathfrak{U} \int\limits_{{}_jS} u_l \, d\sigma = 0 \qquad (l = 1, \ldots, m) \tag{191}$$

ein, unter ${}_j\mathfrak{U}$ den Wert des Gesamtpotentials auf ${}_jS$ verstanden (vgl. loc. cit. [42] b) S. 173).

Wir haben für die Lösungen ζ der Integro-Differentialgleichung (75) eine nach Potenzen der Parameter $\lambda, s_1, \ldots, s_q, r_1, \ldots, r_m$, die $m-2$ Verzweigungsgleichungen zu erfüllen haben, aufsteigende Reihe gewonnen. Wird nunmehr gefordert, daß die Volumina der einzelnen Massen von T_1 vorgeschriebene Werte haben, so erhalten wir weitere q Integralbeziehungen. Ein neues Problem liegt hierbei nur für $q > 1$ vor. Ist $q = 1$, so kann man $s = 0$ setzen und, wie schon früher einmal bemerkt, falls es dazu gehörige reelle Gleichgewichtsfiguren gibt, demnach bestimmt, wenn der reguläre Fall vorliegt, durch eine geeignete Ähnlichkeitstransformation zu der Figur vorgeschriebenen Volumens über-

---

[66] Vgl. A. Collet, Sur les solutions approchées de certaines équations intégrales non linéaires, Ann. de Toulouse (3) 4 (1912), S. 199—249, insb. Nr. 23—25; L. Lichtenstein, loc. cit. [42] b) S. 172—173; E. Hölder, Über einige Integralgleichungen aus der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten mit Anwendung auf Stabilitätsbetrachtungen, Sächsische Berichte 78 (1926), S. 3—20, insb. S. 3—10.

gehen. Ist $q > 1$, so kann man durch eine Ähnlichkeitstransformation nur erzwingen, daß bsp. $\sum {}_j\mathfrak{v}\, f_j$ oder $\sum {}_j\mathfrak{v}$ einen vorgeschriebenen Wert hat, unter ${}_j\mathfrak{v}$ das Volumen der j-ten Einzelmasse von T_1 verstanden.

Wir beschränken uns in dem Folgenden auf einige Bemerkungen über den einfachsten Fall $q = 2$ und setzen überdies voraus, daß es sich um den regulären Fall handelt. Wie wir wissen, dürfen wir jetzt $r_1 = r_2 = 0$ annehmen und brauchen keinerlei Verzweigungsgleichungen zu betrachten. Wir fragen, ob es in der Nachbarschaft von T weitere Gleichgewichtsfiguren gibt, die folgende Eigenschaften haben. Sie gehören zu dem Werte ω der Winkelgeschwindigkeit und bestehen aus zwei Einzelmassen vom Volumen ${}_1\mathfrak{v} + \delta_1\mathfrak{v}$ und ${}_2\mathfrak{v} + \delta_2\mathfrak{v}$, unter ${}_1\mathfrak{v}$ bzw. ${}_2\mathfrak{v}$ das Volumen von ${}_1T$ bzw. ${}_2T$, unter $\delta_1\mathfrak{v}$, $\delta_2\mathfrak{v}$ dem absoluten Betrage nach hinreichend kleine Größen verstanden.

Offenbar ist jetzt $\lambda = 0$. Nach (117) gilt

$$\zeta(\sigma) = \frac{s}{\psi} - \int_S s'\,\mathfrak{H}(\sigma, \sigma')\,\frac{d\sigma'}{\psi'} + \ldots, \tag{192}$$

unter $\mathfrak{H}$ den zu dem Kerne $\mathfrak{K}(\sigma, \sigma') = \frac{1}{\varrho} - \psi\,\psi'(u_1 u_1' + u_2 u_2')$ gehörenden lösenden Kern verstanden. (Wir erinnern daran, daß der reguläre Fall vorliegt, somit $m = 2$ ist.)

Es gilt

$$\int_0^1 dt \int_{{}_1S_t} \zeta \cos\varphi_t\, d\sigma_t = \delta_1\mathfrak{v}, \quad \int_0^1 dt \int_{{}_2S_t} \zeta \cos\varphi_t\, d\sigma_t = \delta_2\mathfrak{v}. \tag{193}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} \cos\varphi_t\, d\sigma_t &= (a A_t + b B_t + c C_t)\, d\xi\, d\eta \\ &= \sum a\,\frac{\partial(Y + bt\zeta, Z + ct\zeta)}{\partial(\xi, \eta)}\, d\xi\, d\eta = (1 + E_1 t + E_2 t^2)\, d\sigma. \end{aligned} \tag{194}$$

In die Funktionen E_1 und E_2, die, wie man sich leicht überzeugt, in bezug auf ζ vom ersten bzw. zweiten Grade sind, gehen $\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}, \frac{\partial\zeta}{\partial\eta}$ nicht ein.

Aus (193) und (194) folgt

$$\int_{{}_1S} \zeta\, d\sigma + \frac{1}{2}\int_{{}_1S} E_1\,\zeta\, d\sigma + \frac{1}{3}\int_{{}_1S} E_2\,\zeta\, d\sigma = \delta_1\mathfrak{v} \tag{195}$$

und analog

$$\int_{{}_2S} \zeta\, d\sigma + \frac{1}{2}\int_{{}_2S} E_1\,\zeta\, d\sigma + \frac{1}{3}\int_{{}_2S} E_2\,\zeta\, d\sigma = \delta_2\mathfrak{v}, \tag{196}$$

demnach wegen (192)

$$\begin{aligned} s_1\left(\int_{{}_1S} \frac{1}{\psi}\, d\sigma - \int_{{}_1S}\int_{{}_1S} \frac{\mathfrak{H}}{\psi'}\, d\sigma\, d\sigma'\right) - s_2 \int_{{}_1S}\int_{{}_2S} \frac{\mathfrak{H}}{\psi'}\, d\sigma\, d\sigma' + \ldots &= \delta_1\mathfrak{v}, \\ - s_1 \int_{{}_2S}\int_{{}_1S} \frac{\mathfrak{H}}{\psi'}\, d\sigma\, d\sigma' + s_2\left(\int_{{}_2S} \frac{1}{\psi}\, d\sigma - \int_{{}_2S}\int_{{}_2S} \frac{\mathfrak{H}}{\psi'}\, d\sigma\, d\sigma'\right) + \ldots &= \delta_2\mathfrak{v}. \end{aligned} \tag{197}$$

Ist die Determinante Δ der Glieder erster Ordnung in bezug auf s_1 und s_2 von Null verschieden, so gehört zu jedem Paar dem absoluten Betrage nach hinreichend kleiner Werte $\delta_1 \mathfrak{v}$ und $\delta_2 \mathfrak{v}$ eine Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft von T. Ist $\Delta = 0$, so entsprechen einem System der Werte $\delta_1 \mathfrak{v}$, $\delta_2 \mathfrak{v}$, allgemein zu reden, zwei oder mehr Gleichgewichtsfiguren. Einzelne von diesen oder auch alle könnten freilich imaginär sein.

Ganz analoge Entwicklungen gelten für $q > 2$. Betrachten wir eine aus drei Einzelmassen ${}_1T$, ${}_2T$, ${}_3T$ $(q = 3)$ gleicher Dichte bestehende Gleichgewichtsfigur mit den Symmetrieebenen $z = 0$ und $y = 0$ und nehmen an, daß die Ebene $y = 0$ wohl ${}_1T$, nicht aber zugleich ${}_2T$ und ${}_3T$ trifft. Augenscheinlich liegen ${}_2T$ und ${}_3T$ in bezug auf die Ebene $y = 0$ spiegelbildlich ähnlich. Ist T, wie wir weiter annehmen wollen, eine reguläre Figur, so erhalten wir zur Bestimmung einer zu demselben Wert der Winkelgeschwindigkeit ω gehörenden Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft von T, deren Einzelmassen die Volumina ${}_1\mathfrak{v} + \delta_1 \mathfrak{v}$, ${}_2\mathfrak{v} + \delta_2 \mathfrak{v}$, ${}_3\mathfrak{v} + \delta_3 \mathfrak{v}$ haben, ein zu (197) analoges System von drei Gleichungen. Es möge die aus den Koeffizienten der Glieder ersten Grades in bezug auf s_1, s_2, s_3 gebildete Determinante Δ einen von Null verschiedenen Wert haben. Dann gehört zu jedem dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Wertsystem $\delta_1 \mathfrak{v}$, $\delta_2 \mathfrak{v}$, $\delta_3 \mathfrak{v}$ eine und nur eine Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft von T. Wählt man $\delta_2 \mathfrak{v} \neq \delta_3 \mathfrak{v}$, so gelangt man zu einer Gleichgewichtsfigur *mit nur einer Symmetrieebene.*

Wir werden in dem fünften Kapitel sehen (S. 155), daß es eine aus drei kongruenten Massen, die sich nur wenig von Kugelkörpern unterscheiden, bestehende Gleichgewichtsfigur gibt, die folgende Eigenschaften hat. Die Schwerpunkte von ${}_1T$, ${}_2T$, ${}_3T$ liegen in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks in der Ebene $z = 0$, dessen Schwerpunkt der Koordinatenursprung ist. Die Seitenlängen $\boldsymbol{L}$ des Dreiecks, d. h. die Schwerpunktsentfernungen der Einzelmassen sind als groß im Verhältnis zu ihrem als festgehalten zu denkenden Durchmesser $\boldsymbol{D}$ anzusehen. Das Ganze rotiert um die z-Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit ω, die für $\boldsymbol{L} \to \infty$ gegen Null konvergiert. Für hinreichend große $\boldsymbol{L}$, somit hinreichend kleine ω, sind die fraglichen Gleichgewichtsfiguren, wie E. Hölder zeigte, regulär. Darüber hinaus zeigte nun Hölder, daß die Determinante Δ, von der soeben die Rede war, nicht verschwindet, und bewies damit als erster die Existenz homogener Gleichgewichtsfiguren mit nur einer Symmetrieebene[67]. Ob es Gleichgewichtsfiguren

[67] Vgl. E. Hölder, loc. cit. [59] b) S. 219—225. A. a. O. S. 209—219 findet sich noch ein anderer Beweis derselben Tatsache. Daß sich die Existenz von Gleichgewichtsfiguren mit nur einer Symmetrieebene durch Betrachtung von Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft einer Lagrangeschen Dreieckslösung des Dreikörperproblems würde nachweisen lassen, hat zuerst E. Kähler vermutet. Vgl. E. Kähler, loc. cit. [123], E. Hölder a. a. O. S. 199.

mit gleicher Eigenschaft gibt, die aus einer einzigen Masse bestehen, ist zur Zeit noch eine offene Frage.

Nun eine Schlußbemerkung allgemeiner Natur. Es sei T_1 irgendeine Gleichgewichtsfigur in der Umgebung nullter Ordnung des Flüssigkeitskörpers T. Das Volumen von T sei mit $\mathfrak{v}$ bezeichnet. Es sei zunächst nur bekannt, daß T_1 aus q_1 ($\geqq q$) Einzelmassen besteht, von einer endlichen Anzahl geschlossener, doppelpunktfreier, stetiger (Jordanscher) Flächen begrenzt ist und ein bestimmtes Volumen $\mathfrak{v}_1$ im Sinne von Peano und Jordan hat. Die Normale (ν) in einem Punkte P auf S trifft dabei S_1 allemal in einem oder mehreren (sogar unendlich vielen) Punkten. In der Nachbarschaft einer Komponente von S können übrigens mehrere Komponenten von S_1 liegen. Offenbar liegt auch $\mathfrak{v}_1$ in der Umgebung von $\mathfrak{v}$. Wie wir wissen, kann man von T_1 durch eine Ähnlichkeitstransformation zu einem ebenfalls in der Umgebung von T gelegenen Körper übergehen, dessen Volumen gleich $\mathfrak{v}$ ist. Wir wollen darum von vornherein $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}$ voraussetzen.

Es sei M der Höchstwert der Entfernung eines Punktes auf S_1 von S. Es sei T_{01} die Vereinigungsmenge der beiden Mengen T und T_1 und T'_{01} ihr Durchschnitt[68]. Das Volumen der Menge $T_{01} - T'_{01}$ heiße Δ_{01}. Offenbar konvergiert Δ_{01} für $M \to 0$ gegen Null. Es läßt sich nun zeigen, daß, *wenn M und $|\lambda|$ hinreichend klein sind, wenn etwa*

$$M < \varepsilon_* \leqq \varepsilon^*, \quad |\lambda| \leqq d^{(3)} \leqq d^{(2)}$$

gilt,

1. *die einzelnen Komponenten von S_1 denjenigen von S umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können,*

2. *die Gleichung von S_1 auf die Form $\zeta = \zeta(\xi, \eta, \omega_1)$ gebracht werden kann,*

3. *die Funktion ζ stetige Ableitungen aller Ordnungen hat.* Für $\omega_1 \to \omega$ konvergieren alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial \xi^\alpha \, \partial \eta^\beta} \zeta(\xi, \eta, \omega_1)$ $(\alpha + \beta > 0)$, die übrigens analytische und reguläre Funktionen von ω_1 darstellen, auf S gleichmäßig gegen Null. Der Körper T_1 liegt in einer Umgebung beliebig hoher Ordnung von T.[69]

Wir haben vorhin gezeigt (vgl. S. 60), daß die in **9.** gefundene Lösung der Integro-Differentialgleichung (100) die einzige Lösung ist, die zu den vorgegebenen Werten von $\lambda, s_1, \ldots, s_q, r_1, \ldots, r_m$ gehört, wenn voraus-

---

[68] D. h. die Gesamtheit der Punkte, die T und T_1 zugleich angehören.

[69] Vgl. loc. cit. [42] a) S. 270—276. A. a. O. findet sich ein ins einzelne gehender Beweis der Behauptungen 1. und 2. In dem besonderen Falle Maclaurinscher und Jacobischer Ellipsoide als Ausgangsfiguren sind die fraglichen Aussagen schon früher von Liapounoff in der auf S. 32 genannten Arbeit dargetan worden. Was die Behauptung 3. betrifft, so folgt sie für $\alpha + \beta = 2$ ohne weiteres aus den Entwicklungen meiner soeben genannten Arbeit. In dieser werden nämlich im Gegensatz zu der II. Abhandlung (loc. cit. [42] b) auch die zweiten Ableitungen von ζ betrachtet. Die allgemeine Aussage des Textes erledigt sich in ähnlicher Weise.

gesetzt wird, daß diese Werte, wie auch ζ, $\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}$ dem absoluten Betrage nach hinreichend klein sind. In Verbindung mit den soeben erwähnten Behauptungen 1. und 2. ist damit gezeigt, daß *die von uns unter Heranziehung der Verzweigungsgleichungen gefundenen Gleichgewichtsfiguren die Gesamtheit der Gleichgewichtsfiguren T_1 in der Umgebung von T erschöpfen, die folgende Eigenschaften haben. Sie bestehen aus einer endlichen Anzahl von Massen, die von Jordanschen Flächen begrenzt sind und ein bestimmtes Volumen im Sinne von Peano und Jordan haben. Das Volumen von T_1 liegt in der Umgebung des Volumens von T, die Winkelgeschwindigkeit ω_1 liegt in der Umgebung von ω.*

11. Rotierende Flüssigkeiten in einem Außenfelde. Die Ergebnisse der Nr. **7.** bis **9.** lassen sich ohne Schwierigkeiten auf den Fall ausdehnen, daß neben den bis jetzt allein betrachteten Anziehungs- und Zentrifugalkräften noch weitere Kräfte wirken. Wir nehmen zunächst an, daß T die Ebenen $z=0$ und $y=0$ zu Symmetrieebenen hat, daß die äußeren Kräfte eine Kräftefunktion $\varkappa G(x, y, z)$ haben, daß $G(x, y, z)$ in einem Gebiete, welches T ganz in seinem Innern enthält, etwa analytisch und regulär ist und daß

$$G(x,y,z)=G(x,-y,z)=G(x,y,-z) \tag{198}$$

gilt[70]. Das Außenfeld kann insbesondere von der Anziehung starrer mitrotierender Massen, die in bezug auf die Ebenen $y=0$ und $z=0$ symmetrisch verteilt sind, herrühren.

Für die Grundgleichung (19) tritt jetzt die erweiterte Gleichung

$$\begin{aligned} V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V(X, Y, Z) + G(X_1, Y_1, Z_1) - G(X, Y, Z) \\ = \frac{\omega^2}{2\varkappa}(X^2+Y^2) - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}(X_1^2+Y_1^2) + s \end{aligned} \tag{199}$$

ein. Wir setzen, wenn wieder (ξ, η, ζ^*) den Punkt (x, y, z) bezeichnet,

$$G(x,y,z)=\Gamma(\xi,\eta,\zeta^*)\,. \tag{200}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} G(X_1, Y_1, Z_1) - G(X, Y, Z) \\ = \zeta\frac{\partial}{\partial\nu}\Gamma(\xi,\eta,0) + \frac{\zeta^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\Gamma(\xi,\eta,0) + \dots, \end{aligned} \tag{201}$$

demnach wegen (30)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varkappa}(V^{(1)}+V^{(2)}+V^{(3)}+\dots) + \zeta\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu} + \frac{1}{2}\zeta^2\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\nu^2} + \dots \\ = \frac{\omega^2}{2\varkappa}(X^2+Y^2) - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}(X_1^2+Y_1^2) + s\,. \end{aligned} \tag{202}$$

---

[70] Die auf die Einheit der Masse wirkende äußere Kraft hat die Komponenten $\varkappa\frac{\partial G}{\partial x}$, $\varkappa\frac{\partial G}{\partial y}$, $\varkappa\frac{\partial G}{\partial z}$. Man beachte, daß das Koordinatenkreuz und damit auch das Feld $G(x, y, z)$ rotiert, und zwar einmal mit der Winkelgeschwindigkeit ω, das andere Mal mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1.

Die Schwerkraft im Punkte (ξ, η) steht auf S senkrecht und ist (positiv nach außen gerichtet) gleich

$$(203) \qquad \varkappa\left[\frac{\partial}{\partial \nu} W(\xi, \eta, 0) + \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\right] + \omega^2 R \tau = \varkappa \psi .$$

Aus (62), (203), (202) ergibt sich

$$(204) \quad \psi\zeta + \int\limits_S \frac{f'}{\varrho}\zeta' d\sigma' = s - R^2\lambda - \frac{\omega^2}{2\varkappa}(a^2+b^2)\zeta^2 - 2R\tau\lambda\zeta$$
$$- (a^2+b^2)\lambda\zeta^2 - \frac{1}{\varkappa}(V^{(2)} + V^{(3)} + \ldots) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \nu^2}\zeta^2 - \ldots .$$

Diese Integro-Differentialgleichung tritt an Stelle der Gleichung (75) ein.

Es möge das Außenpotential von z unabhängig sein. Wie man sich leicht überzeugt, hat in diesem Falle die Integralgleichung

$$(205) \qquad \psi\zeta + \int\limits_S \frac{f'}{\varrho}\zeta' d\sigma' = 0$$

gewiß die triviale Lösung $u_1 = \text{const.}\, c$. Hat das Außenpotential Rotationssymmetrie um die z-Achse, so hat (205) die triviale Lösung $u_2 = \text{const.}\,\gamma = \text{const.}\,(Xb - Ya)$. Ist T ein Rotationskörper um die z-Achse, so ist $u_2 \equiv 0$ zu setzen. Ist das aus Zentrifugalkraft und Außenfeld resultierende Potential von y unabhängig, so hat (205) die triviale Lösung $\tilde{u} = \text{const.}\, b$. Die Nachbarfigur kann man, wie man sich leicht überzeugt, so orientieren, daß

im Falle 1. $\int\limits_S f\psi u_1 \zeta\, d\sigma = 0$, im Falle 2. $\int\limits_S f\psi u_2 \zeta\, d\sigma = 0$

ist. Im Falle 3. tritt hierfür die Beziehung $\int\limits_S f\psi\tilde{u}\zeta\, d\sigma = 0$ ein.

Die weitere Behandlung des Problems verläuft ganz analog wie in dem besonderen Falle $\Gamma = \text{konstant}$. Für $\mathfrak{N}$ tritt, falls keine nichttrivialen Nullösungen existieren, in dem Falle 1. die Funktion $\frac{1}{\varrho} - \psi\psi' u_1 u_1'$, im Falle 2. die Funktion $\frac{1}{\varrho} - \psi\psi' u_2 u_2'$, im Falle 3. die Funktion $\frac{1}{\varrho} - \psi\psi'' \tilde{u}\tilde{u}$ ein.

Im allgemeinen wird man jetzt, auch wenn $q = 1$ ist, nicht mehr durch eine Ähnlichkeitstransformation auf eine neue Gleichgewichtsfigur geführt. Man darf darum nicht mehr $s = 0$ setzen, wenn man eine Figur T_1 von vorgegebenem Volumen bestimmen will. Die vorstehenden Betrachtungen gelten in ähnlicher Weise, auch wenn das Fremdfeld $\varkappa G(x, y, z)$ unsymmetrisch ist. Hier wird man die Voraussetzung, daß T Symmetrieebenen hat, im allgemeinen fallen lassen müssen. Die Integralgleichung (205) wird in der Regel keine trivialen Nullösungen haben.

Es sei T eine beliebige Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeiten, die unter der Wirkung eines Fremdfeldes $\varkappa G$ steht, und es möge jetzt ein von einem Parameter $\hat{s}$ abhängiges Zusatzfeld $\varkappa\hat{s}\hat{G}(x, y, z; \hat{s})$ hinzu-

kommen. Wir nehmen an, daß $\hat{G}(x, y, z; \hat{s})$ für alle x, y, z in einem Gebiete, das T in seinem Innern enthält, und für alle hinreichend kleinen $|\hat{s}|$ analytisch und regulär ist. Durch eine geringfügige Modifikation der vorstehenden Betrachtungen läßt sich die Frage beantworten, ob es für genügend kleine $|\hat{s}|$ in der Nachbarschaft von T Gleichgewichtsfiguren gibt, die zu dem Außenfelde $\varkappa(G + \hat{s}\hat{G})$ gehören.

Die fundamentale Integro-Differentialgleichung nimmt jetzt die Form an

$$\begin{aligned}\psi\zeta + \int_S \frac{f'}{\varrho}\zeta' d\sigma' &= s - R^2\lambda - \hat{s}\hat{\Gamma} - \hat{s}\zeta\frac{\partial}{\partial\nu}\hat{\Gamma} - \frac{\omega^2}{2\varkappa}(a^2+b^2)\zeta^2 \\ &- 2R\tau\lambda\zeta - (a^2+b^2)\lambda\zeta^2 - \frac{1}{\varkappa}(V^{(2)} + V^{(3)} + \ldots) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\nu^2}\zeta^2 - \ldots \\ &- \hat{s}\frac{\zeta^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\hat{\Gamma} - \ldots; \quad \hat{\Gamma}(\xi,\eta,\zeta;\hat{s}) = \hat{G}(x,y,z;\hat{s}); \\ &\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}(\xi,\eta,0;\hat{s}). \end{aligned} \tag{206}$$ [71]

Im Anschluß an die Ausführungen der Nummer **11.** wollen wir jetzt einige Systeme betrachten, die aus einem starren Körper und einer homogenen Flüssigkeit bestehen und die sich im relativen Gleichgewicht befinden. Wir beginnen mit einem von Laplace behandelten Problem der Gleichgewichtsverteilung.

12. Ein von Laplace behandeltes Problem der Gleichgewichtsverteilung [72]**.** 1. Es sei T_0 ein von einer Kugel S_0 begrenzter starrer Körper konstanter Dichte f_0. Über T_0 ist eine zusammenhängende Schicht $T - T_0$ einer homogenen Flüssigkeit der Dichte $f \lesseqgtr f_0$ ausgebreitet. Als Fremdfeld Γ kann hier das Gravitationsfeld einer von S_0 umschlossenen Masse der Dichte $f_0 - f$ angesehen werden. Im Ruhezustande ($\omega = 0$) ist offenbar das System im Gleichgewicht, wenn auch die Begrenzung S von T eine Kugel ist. *Welches sind die Gleichgewichtsfiguren T_1 für kleine Werte der Winkelgeschwindigkeit ω_1 und demnach auch von $\lambda = \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}$?*

Die Radien der beiden Kugeln seien $\mathfrak{r}_0$ und $\mathfrak{r}$. Wie man leicht findet, ist die Schwerkraft auf S

$$\varkappa\psi = -\frac{4\pi\varkappa f}{3\mathfrak{r}^2}\left(\mathfrak{r}^3 + \mathfrak{r}_0^3\frac{f_0 - f}{f}\right). \tag{207}$$

---

[71] In diesem Zusammenhang sei noch die Arbeit von E. Hölder, Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten mit Oberflächenspannung, Math. Zeitschr. **25** (1926), S. 188—208 genannt. Sie geht insofern über die im Text entwickelte Theorie hinaus, als sie ein Außenfeld in Betracht zieht, das von der Flüssigkeitskonfiguration abhängt.

[72] Vgl. L. Lichtenstein, loc. cit. [42] b) S. 218—225. Mit dem besonderen Falle eines ruhenden Systems hat sich in Durchführung älterer Untersuchungen von Laplace (Traité de Mécanique céleste, tome second, Livre III, p. 82—87) Poincaré beschäftigt. Vgl. H. Poincaré, loc. cit. [38] S. 290—293. Die Überlegungen von Poincaré haben nur einen heuristischen Wert.

Es gilt ferner

(208) $$\Gamma = \frac{4}{3}\pi \mathfrak{r}_0^3 \frac{1}{\mathfrak{r}+\zeta}(f_0 - f)\,.$$

Die charakteristische Integralgleichung ist jetzt

(209) $$-\frac{4\pi}{3\mathfrak{r}^2}\left(\mathfrak{r}^3 + \mathfrak{r}_0^3 \frac{f_0 - f}{f}\right)\zeta + \int\limits_S \frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' = 0\,.$$

Die Eigenwerte der Integralgleichung

(210) $$\zeta - \nu \int\limits_S \frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' = 0$$

sind bekanntlich in der Formel $\frac{2n+1}{4\pi\mathfrak{r}}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ enthalten. Der Eigenwert $\frac{2n+1}{4\pi\mathfrak{r}}$ ist $(2n+1)$-fach; die zugehörigen Eigenfunktionen sind die allgemeinen Kugelfunktionen n-ter Ordnung. Jedesmal, wenn

(211) $$\frac{\mathfrak{r}^3}{\mathfrak{r}^3 + \mathfrak{r}_0^3 \frac{f_0 - f}{f}} = \frac{2n+1}{3}$$

ist, hat die Integralgleichung (209) von Null verschiedene Lösungen. Ist die Gleichung (211) für keinen Wert von n erfüllt, so liegt der reguläre Fall vor; T gehört einer zweiparametrigen regulären Reihe von Gleichgewichtsfiguren an. Beschränkt man sich mit Laplace und Poincaré auf die Betrachtung des Ruhezustandes, so wird $\lambda = 0$, und die lineare Reihe hängt nur noch von dem einen Parameter s ab; alle Nachbarfiguren sind Kugeln um den Mittelpunkt von T_0.

2. Es sei jetzt zunächst $\mathfrak{r}_0 = 0$, d. h. es liege eine flüssige Vollkugel vor. Dann ist die Gleichung (211) für $n = 1$ erfüllt. Die Integralgleichung (209) hat drei linear unabhängige Lösungen:

$$\cos\theta = \frac{Z}{\mathfrak{r}} = \text{const.}\cdot u_1\,, \qquad \sin\theta\cos\chi = \frac{X}{\mathfrak{r}} = \text{const.}\cdot u_3\,,$$
$$\sin\theta\sin\chi = \frac{Y}{\mathfrak{r}} = \text{const.}\cdot u_4\,,$$

unter θ und χ vorübergehend Polarkoordinaten auf der Einheitskugel verstanden. Diese Nullösungen sind trivial, sie entsprechen den Translationen in der Richtung der Koordinatenachsen. Man kann sie außer Betracht lassen, da man durch geeignete Translation der Nachbarfigur stets erreichen kann, daß $\int\limits_S \psi X \zeta d\sigma = \int\limits_S \psi Y \zeta d\sigma = \int\limits_S \psi Z \zeta d\sigma = 0$ wird. Alle Nachbarfiguren sind Kugeln um den Mittelpunkt von T.

Etwas anders ist die Sachlage, wenn man von T zu einer Nachbarfigur T_1 übergeht, die zu einem von Null verschiedenen Wert von ω_1 gehört. Man kann, wie wir wissen (vgl. S. 65), wie auch T beschaffen sei, durch eine geeignete Verschiebung der Nachbarfigur parallel zu der z-Achse erreichen, daß $\int\limits_S \psi \zeta c d\sigma = 0$ wird. Dies besagt offenbar im vor-

liegenden Falle soviel wie

$$\int\limits_S \psi\zeta Z\, d\sigma = 0. \tag{212}$$

Da T ein Rotationskörper ist, so kann man ferner (vgl. S. 63) durch eine Drehung von T_1 um die z-Achse erzwingen, daß

$$\int\limits_S \psi\zeta u_4\, d\sigma = \int\limits_S \psi\zeta Y\, d\sigma = 0 \tag{213}$$

wird. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß man durch eine geeignete Schraubung um die z-Achse den beiden Beziehungen (212), (213) zugleich genügen kann. Wir beweisen, daß für alle reellen Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft von T auch

$$r_3 = -\int\limits_S f\psi\zeta u_3\, d\sigma = \text{const.} \cdot \int\limits_S f\psi\zeta X\, d\sigma = 0 \tag{214}$$

ist.

Dies sieht man etwa so ein. Es sei T der Ausgang irgendeiner linearen Reihe von Gleichgewichtsfiguren. Wie wir wissen, liegt der Schwerpunkt einer nur der Eigengravitation (und den Zentrifugalkräften) ausgesetzten Gleichgewichtsfigur T_1 stets auf der Rotationsachse. Darum ist für alle hinreichend kleinen Werte von $|\lambda|$, wie sich ohne Mühe zeigen läßt,

$$\int\limits_S f\psi\zeta X\, d\sigma + \ldots = 0,$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder von zweiter und dritter Ordnung in bezug auf ζ sind. (Vgl. bsp. bei E. Hölder loc. cit. [75], S. 575—577). Demnach ist $r_3 = -\int\limits_S \psi\zeta u_3\, d\sigma$ gewiß von zweiter oder dritter Ordnung.

Hieraus folgt, daß, wenn auch $\underline{\zeta} = \underline{\zeta}(\xi, \eta)$ die Gleichung einer zu denselben Werten von λ und s wie T_1 gehörenden Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft von T bezeichnet,

$$\begin{aligned} &|\underline{r}_3 - r_3| \leqq \alpha_* \Omega_* \mho_* \qquad (\alpha_* \text{ konstant}),\\ &\Omega_* = \operatorname{Max}\{|\zeta|,\ |\underline{\zeta}|\},\\ &\mho_* = \operatorname{Max}\left\{|\zeta - \underline{\zeta}|,\ \left|\frac{\partial}{\partial\xi}(\zeta - \underline{\zeta})\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial\eta}(\zeta - \underline{\zeta})\right|\right\} \end{aligned} \tag{215}$$

gesetzt werden kann.

Aus der Integro-Differentialgleichung (100) und der hierzu analogen Gleichung für $\underline{\zeta}$ folgt aber ohne Mühe, daß

$$|\zeta - \underline{\zeta}|,\ \left|\frac{\partial}{\partial\xi}(\zeta - \underline{\zeta})\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial\eta}(\zeta - \underline{\zeta})\right| < \alpha^* |\underline{r}_3 - r_3| + {}^*\alpha\, \Omega_* \mho_* \tag{216}$$

$(\alpha^*$ konstant)

gilt. Aus (215) und (216) folgt aber

$$\mho_* < (\alpha_* \alpha^* + {}^*\alpha)\, \Omega_* \mho_*, \tag{217}$$

mithin, sobald $(\alpha_* \alpha^* + {}^*\alpha)\, \Omega_* < 1$ angenommen wird, $\mho_* = 0$, d. h. $\underline{\zeta} \equiv \zeta$ und $\underline{r}_3 = r_3$.

Die Maclaurinschen Ellipsoide stellen darum die einzige reelle Reihe von Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Kugel dar[73]. Offenbar ist bei ihnen tatsächlich $r_3 = 0$.

3. Es sei jetzt $\mathfrak{r}_0 > 0$. Man kann die Gleichung (211) zunächst dadurch erfüllen, daß man

$$(218) \qquad n = 0 \quad \text{und} \quad f_0 = \left(1 + 2\,\frac{\mathfrak{r}^3}{\mathfrak{r}_0^3}\right) f$$

annimmt. Der Eigenwert $\frac{1}{4\pi\mathfrak{r}}$ von (210) ist einfach. Die zugehörige, in bekannter Weise normierte Eigenfunktion (vgl. (92)), sie heiße $\mathring{u}$, ist auf S konstant.

Aus (207) und (218) folgt vor allem $\psi = -4\pi f \mathfrak{r}$. Wie man sich ferner leicht überzeugt, ist $\mathring{u} = \frac{1}{4\pi f \mathfrak{r}^{\frac{3}{2}}}$. Es gilt weiter

$$(219) \qquad \mathring{r} = -\int\limits_S f\psi\zeta\mathring{u}\,d\sigma = -f\psi\mathring{u}\int\limits_S \zeta\,d\sigma = \frac{f}{\mathfrak{r}^{\frac{1}{2}}}\int\limits_S \zeta\,d\sigma,$$

Es sei v_0 das Volumen der Flüssigkeitsschicht $T - T_0$.

Es ist leicht zu zeigen, daß es nicht mehr als eine reelle Gleichgewichtsfigur der Flüssigkeit in der Umgebung von T geben kann, deren Volumen v in der Umgebung des Wertes v_0 liegt. Wegen (219) ist nämlich

$$(220) \qquad v - v_0 = \frac{1}{f}\,\mathfrak{r}^{\frac{1}{2}}\,\mathring{r} + \ldots,$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder von zweiter oder dritter Ordnung in bezug auf ζ sind. Gehört zu einer etwa vorhandenen anderen Gleichgewichtsfigur von gleichem Volumen der Wert $\mathring{r}'$, so ist die Differenz $\mathring{r} - \mathring{r}'$ von zweiter oder dritter Ordnung. Wie vorhin schließt man hieraus, daß $\mathring{r} = \mathring{r}'$ gilt, somit unsere Behauptung bewiesen ist.

Für den Ruhezustand ($\omega_1 = 0$, $\lambda = 0$) *sind offenbar die einzigen reellen Gleichgewichtsfiguren Kugeln um den Koordinatenursprung.*

Es sei jetzt $\lambda > 0$. Es handelt sich um die Gleichgewichtsfigur einer in langsamer Rotation begriffenen Flüssigkeitsschicht in der Umgebung der Kugel T vom Radius $\mathfrak{r}$, die einen kugelförmigen Kern vom Radius $\mathfrak{r}_0 < \mathfrak{r}$ allseitig umgibt. Es ist $f_0 = \left(1 + 2\,\frac{\mathfrak{r}^3}{\mathfrak{r}_0^3}\right) f$. Wie wir soeben gesehen haben, kann es nicht mehr als eine reelle Gleichgewichtsfigur der Flüssigkeit in der Umgebung von T geben, deren Volumen v ist und in der Umgebung von v_0 liegt. Die Betrachtung der fundamentalen Integro-Differentialgleichung des Problems lehrt, wie sich gleich zeigen wird, daß das Problem tatsächlich eine Lösung hat.

---

[73] Sie finden ihre Fortsetzung in einer Schar verlängerter Rotationsellipsoide, die zu den Werten $\lambda < 0$ gehören. Diese Ellipsoide entsprechen den von dem Potential $-\frac{\omega_1^2 R^2}{2}$ herrührenden *Zentripetalkräften.*

Die fragliche Integro-Differentialgleichung lautet jetzt

$$(221)\quad \psi\zeta + \int_S f' \overset{\circ}{N} \zeta' d\sigma' = s - R^2\lambda - 2R\mathfrak{r}\lambda\zeta + \overset{\circ}{r}\psi\overset{\circ}{u} - (a^2+b^2)\lambda\zeta^2$$
$$- \frac{1}{\varkappa}(V^{(2)} + V^{(3)} + \ldots) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial\nu^2}\zeta^2 - \ldots, \qquad \overset{\circ}{N} = \frac{1}{\varrho} - \psi\psi'\overset{\circ}{u}\overset{\circ}{u}'.$$

Es sei $\overset{\circ}{H}$ der zu $\frac{1}{\psi}f'\overset{\circ}{N}$ gehörige lösende Kern. Die Glieder erster Ordnung der Entwicklung von ζ sind leicht zu bestimmen. Man findet (vgl. (118) und (121)) wegen

$$(222)\qquad \int_S \overset{\circ}{H}\overset{\circ}{u}' d\sigma' = \frac{1}{4\pi f \mathfrak{r}^{\frac{3}{2}}}\int_S \overset{\circ}{H} d\sigma' = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_S \overset{\circ}{H}\frac{s}{\psi'} d\sigma' = 0$$

die Entwicklung

$$(223)\qquad \zeta = \frac{s}{\psi} + \overset{\circ}{r}\overset{\circ}{u} - \frac{1}{\psi}R^2\lambda + \lambda\int_S \overset{\circ}{H}\frac{R'^2}{\psi'} d\sigma' + \ldots .$$

Die Verzweigungsgleichung ist, wie man sich leicht überzeugt, wegen (222)

$$(224)\quad \overset{\circ}{r} = -\int_S f\psi\zeta\overset{\circ}{u} d\sigma = \frac{f}{\mathfrak{r}^{\frac{1}{2}}}\int_S \zeta d\sigma = -\frac{4\pi\mathfrak{r}^2 s}{4\pi\mathfrak{r}^{\frac{3}{2}}} + \overset{\circ}{r} + \frac{\lambda}{4\pi\mathfrak{r}^{\frac{3}{2}}}\int_S R^2 d\sigma + \ldots .$$

Sie ergibt augenscheinlich

$$(225)\qquad s = \frac{\lambda}{4\pi\mathfrak{r}^2}\int_S R^2 d\sigma + \ldots,$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder in höherer Ordnung von $\overset{\circ}{r}$ und λ abhängen. Aus (223) und (225) folgt

$$(226)\quad \zeta = \overset{\circ}{r}\overset{\circ}{u} + \lambda\left[\frac{R^2}{4\pi\mathfrak{r}f} - \frac{1}{4\pi\mathfrak{r}f}\int_S \overset{\circ}{H}R'^2 d\sigma' - \frac{1}{16\pi^2\mathfrak{r}^3 f}\int_S R^2 d\sigma\right] + \ldots .$$

Die Konstante $\overset{\circ}{r}$ bestimmt sich aus der Forderung, daß das Volumen der Flüssigkeit einen vorgeschriebenen Wert v hat. Es gilt

$$(227)\qquad v = v_0 + \int_S \zeta d\sigma + \ldots,$$

demnach wegen (226) und (222)

$$(228)\quad v - v_0 = \frac{\overset{\circ}{r}}{f}\mathfrak{r}^{\frac{1}{2}} + \lambda\left[\frac{1}{4\pi\mathfrak{r}f}\int_S R^2 d\sigma - \frac{4\pi\mathfrak{r}^2}{16\pi^2\mathfrak{r}^3 f}\int_S R^2 d\sigma\right] + \ldots,$$

somit

$$(229)\qquad \overset{\circ}{r} = \frac{f}{\mathfrak{r}^{\frac{1}{2}}}(v - v_0) + \ldots,$$

im Einklang mit der Formel (220). Hiermit ist die Bestimmung der neuen Gleichgewichtsfigur vollendet.

4. Es sei jetzt endlich $n \neq 0$, $f_0 \neq f$. Die Gleichung (211) kann man erfüllen, wenn man

$$f_0 = f\left\{1 + \frac{2(1-n)}{2n+1}\frac{\mathfrak{r}^3}{\mathfrak{r}_0^3}\right\} \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{230}$$

setzt. Augenscheinlich ist jetzt $f_0 < f$, die Flüssigkeit ist dichter als der Kern. Bei vorgegebenem Verhältnis $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}_0} > 1$ gibt es nur endlich viele Werte von n, so daß $f_0 > 0$ ausfällt. Die Gleichgewichtsfigur T ist eine Verzweigungsfigur. Ob es für den Ruhezustand ($\lambda = 0$) in der Nachbarschaft von T, wie dies von Laplace und Poincaré behauptet worden ist, tatsächlich Gleichgewichtsfiguren gibt, die von einer zu S_0 konzentrischen Kugel verschieden sind, kann erst eine nähere Untersuchung der Verzweigungsgleichungen lehren.

13. Das mathematische Problem der Gestalt des Weltmeeres. Es sei $\mathfrak{T}$ ein starrer, von einer analytischen und regulären Fläche $\mathfrak{S}$ begrenzter gravitierender, der Wirkung äußerer Kräfte entzogener Körper von der in Abb. 1 veranschaulichten Gestalt, der um eine im Raume ruhende Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Ist, wie wir voraussetzen wollen, die Dichte in $\mathfrak{T} + \mathfrak{S}$ analytisch und regulär, so ist das Gravitationspotential, mithin auch das Gesamtpotential der Attraktions- und Zentrifugalkräfte in dem Gesamtraume nebst seinen Ableitungen erster Ordnung stetig und sowohl in $\mathfrak{T} + \mathfrak{S}$ als auch in dem Komplementärbereiche $\mathfrak{T}_a + \mathfrak{S}$ analytisch und regulär. Es möge die „Schwerkraft" in einer Umgebung von $\mathfrak{S}$ von Null verschieden sein, und es möge S_0^* ein in dieser Umgebung gelegenes Stück einer Niveaufläche bezeichnen, das $\mathfrak{S}$ nirgends berührt. Augenscheinlich ist S_0^* abteilungsweise analytisch und hat eine überall, insbesondere auch noch auf $\mathfrak{S}$ stetige Normale.
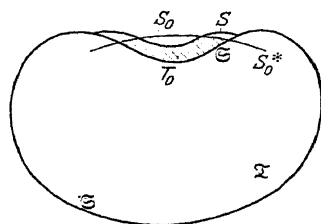
Abb. 1.

Denken wir uns jetzt den von einem Stücke von $\mathfrak{S}$ und von dem zu $\mathfrak{T}_a + \mathfrak{S}$ gehörigen Teile S_0 von S_0^* begrenzten Raum T_0 (Abb. 1) mit einer homogenen, gravitierenden Flüssigkeit der Dichte f ausgefüllt. Im allgemeinen wird das Gesamtpotential der von den Massen in $\mathfrak{T}$ und T_0 herrührenden Attraktionskräfte sowie der Zentrifugalkräfte auf S_0 keinesfalls überall den gleichen Wert haben, so daß die fragliche Konfiguration bei konstantem Außendruck keine Gleichgewichtsfigur darstellt. Dagegen ist zu erwarten, daß sich in der Nachbarschaft von T_0 ein von einem Teil von $\mathfrak{S}$ und von einem Flächenstück mit stetiger Normale, S, begrenztes Gebiet $\hat{T}$ wird angeben lassen, so daß der Körper $\mathfrak{T}$ nebst einer das Gebiet $\hat{T}$ erfüllenden homogenen Flüssigkeit der Dichte f eine Gleichgewichtskonfiguration ergeben. Diese Ver-

mutung wird in dem Folgenden für hinreichend kleine Werte von f durch in geeigneter Weise geleitete sukzessive Approximationen bestätigt. Augenscheinlich handelt es sich hier, falls unter $\mathfrak{T}$ der Erdkörper verstanden wird, *um die Bestimmung der freien Oberfläche des Ozeans*, wobei von der störenden Wirkung der Sonne und des Mondes, mithin von den Fluktuationen der Gezeiten abgesehen wird.

Wir beziehen die Lage der Punkte in einer beiderseitigen Umgebung $\boldsymbol{T}$ von S_0 (Abb. 2) auf ein krummliniges Koordinatensystem ξ, η, ζ, das wie folgt beschaffen ist. Es sei ξ, η irgendein System Gaußscher Parameter auf S_0, und es mögen die kartesischen Koordinaten x, y, z auf S_0 als analytische und reguläre Funktionen von ξ, η erscheinen. Es sei weiter $\boldsymbol{Z}$ ein System analytischer und singularitätenfreier Kurvenstücke (Koordinatenkurven), die folgende Eigenschaften haben. Durch jeden Punkt (x, y, z) in $\boldsymbol{T}$ geht ein und nur ein Kurvenstück (g) des Systems; (g) durchsetzt sowohl S_0 als auch alle anderen Niveauflächen in $\boldsymbol{T}$ in einem einzigen Punkte, und zwar unter einem von Null verschiedenen Winkel. Die einzelnen Individuen von $\boldsymbol{Z}$, die also durch die Koordinaten ξ, η ihres Schnittpunktes mit S_0 vollständig charakterisiert sind, ändern sich mit ξ und η analytisch und regulär. Es sei $\mathfrak{l}^*$ der kürzeste Abstand von zwei beliebigen Individuen aus $\boldsymbol{Z}$ in $\boldsymbol{T}$, und es möge $\mathfrak{l}_*$ der (geradlinige) Abstand ihrer Schnittpunkte mit S_0 bezeichnen. Wir nehmen an, daß $\frac{\mathfrak{l}^*}{\mathfrak{l}_*} > \alpha^{(3)} > 0$ gilt, unter $\alpha^{(3)}$ eine gewisse Konstante $\leqq 1$ verstanden. Diejenigen Kurvenstücke, die durch den Rand von S_0 hindurchgehen, liegen ganz auf $\mathfrak{S}$. Dies heißt also, daß der zu $\mathfrak{S}$ gehörige Teil des Randes von $\boldsymbol{T}$ aus lauter Kurvenstücken des Systems besteht. Durch die vorstehende Wahl der Koordinatenkurven werden, wie sich bald zeigen wird, die mit dem Vorhandensein der Kontinente verbundenen Singularitäten vermieden.
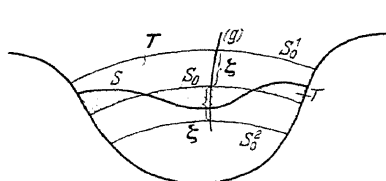
Abb. 2.

Es sei nunmehr ζ die Länge des von (x, y, z) und (ξ, η) begrenzten Bogens von (g), positiv im Sinne der Außennormale zu S_0 in (ξ, η) gerechnet. Die Größen ξ, η und ζ sind die krummlinigen Koordinaten, von denen soeben die Rede war. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die beiden $\boldsymbol{T}$ begrenzenden Flächenstücke S_0^1 und S_0^2 (Abb. 2) die Gleichungen $\zeta = \mathfrak{z}$ und $\zeta = -\mathfrak{z}$ ($\mathfrak{z}$ konstant) haben.

Es möge wie vorhin S die gesuchte Randfläche, — freie Oberfläche des Ozeans —, bezeichnen. Wir nehmen an, daß S sich nur wenig von S_0 unterscheidet und die Gleichung von S sich in der Form $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$, unter $\zeta(\xi, \eta)$ eine auf S_0 stetige Funktion verstanden, darstellen läßt. Wir bezeichnen mit T den von S_0, S und einem Stück von $\mathfrak{S}$ begrenzten

schalenförmigen Raumteil (Abb. 2), er kann aus einem, mehreren oder abzählbar unendlichvielen Gebieten bestehen, von denen jedes ein bestimmtes Volumen im Sinne von Peano und Jordan hat, mit V_T den Ausdruck $\int\limits_T \frac{f'}{r} d\tau'$, wobei das Volumelement $d\tau'$ für $\zeta' > 0$ mit dem positiven, für $\zeta' < 0$ mit dem negativen Vorzeichen zu versehen ist. Es sei weiter $V_0 = \int\limits_{T_0} \frac{f'}{r} d\tau'$ das Newtonsche Potential von T_0 und $\mathfrak{V}$ das Gesamtpotential der Anziehungskräfte des festen Kernes $\mathfrak{T}$ sowie der Zentrifugalkräfte; $\mathfrak{V}$ darf als bekannt angenommen werden. Es sei schließlich ψ die Komponente der „Schwerkraft" in der Richtung von (g), positiv im Sinne wachsender ζ gerechnet, $\psi = \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \zeta}$. Aus den eingangs gemachten Voraussetzungen folgt, daß ψ auf S_0 nirgends verschwindet. Wir nehmen an, daß ψ auf S_0 und darum, falls ζ hinreichend klein ist, überall in $\boldsymbol{T}$ negativ ist. Es sei etwa $\psi(\xi, \eta, 0) = \psi_0 < -\alpha^0$.

Die für das Gleichgewicht notwendige und hinreichende Bedingung besagt, daß auf S

$$(231) \qquad \mathfrak{V}(\xi, \eta, \zeta) + V_0(\xi, \eta, \zeta) + V_T(\xi, \eta, \zeta) = \mathfrak{V}(\xi, \eta, 0) + s \quad (s \text{ konstant})$$

oder, wie man leicht erkennt,

$$(232) \quad \psi_0 \zeta = -V_0(\xi, \eta, 0) - \frac{\zeta^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \mathfrak{V}(\xi, \eta, 0) - \frac{\zeta^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} \mathfrak{V}(\xi, \eta, 0) - \dots$$
$$- V_T(\xi, \eta, \zeta) - [V_0(\xi, \eta, \zeta) - V_0(\xi, \eta, 0)] + s = \hat{\Pi}\{s, \zeta\}$$

gilt. Der Parameter s bestimmt sich etwa durch die Forderung, daß das Volumen der Flüssigkeit einen vorgegebenen, von dem Volumen von T_0 nicht oder doch nur wenig verschiedenen Wert haben soll.

Die Bestimmung von ζ aus (232) kann durch sukzessive Approximationen erfolgen, und zwar bemerkenswerterweise, *ohne daß es sich als nötig erweist, partielle Ableitungen der einzelnen Näherungsfunktionen einzuführen.* Der Konvergenzbeweis stützt sich, wie bei den Betrachtungen der Nr. **9.**, auf zwei Ungleichheiten und macht nicht die geringsten Schwierigkeiten.

Es gilt, wie man unmittelbar sieht,

$$V_0(\xi, \eta, \zeta) - V_0(\xi, \eta, 0) = \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} V_0(\xi, \eta, \theta\zeta) \qquad (0 < \theta < 1),$$

darum

$$(233) \qquad |V_0(\xi, \eta, \zeta) - V_0(\xi, \eta, 0)| \leqq \alpha^{(1)} f \Omega,$$

wenn man in Einklang mit den früher eingeführten Bezeichnungen $\text{Max} |\zeta| = \Omega$ setzt.

Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß wir S_0 mit einem einzigen System von Gaußschen Parametern ξ, η beherrschen können, und be-

zeichnen mit $\tilde{r}_0$ den Abstand der Bilder der Punkte $(\xi, \eta, 0)$ und $(\xi', \eta', 0)$ in dem Raume der *kartesischen* Koordinaten ξ, η, ζ, d. h. den Ausdruck $[(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2]^{\frac{1}{2}}$. Es sei T_Ω der von den beiden Flächen $\zeta = \Omega$ und $\zeta = -\Omega$ und einem Stück von $\mathfrak{S}$ begrenzte schalenförmige Bereich; $\tilde{T}_\Omega$ sei sein Bild im Raume ξ-η-ζ, $d\tilde{\tau}'$ dasjenige von $d\tau'$. Es gilt dann wie sogleich bewiesen werden wird,

$$(234) \qquad |V_T(\xi,\eta,\zeta)| = \left|\int\limits_T \frac{f'}{r}\,d\tau'\right| \leqq \int\limits_T \frac{f'}{r}\,|d\tau'| < \alpha^{(2)} \int\limits_{T_\Omega} \frac{f'}{\tilde{r}_0}\,d\tau'.$$

Es sei daran erinnert, daß in den beiden ersten Integralen rechts $d\tau' \gtrless 0$ sein kann.

Es seien P und P' ein Paar von Punkten in T. Ist ihr Abstand, wie wir zunächst annehmen wollen, hinreichend klein, etwa $r \leqq l^*$, und ist Ω, sagen wir $\leqq \frac{1}{2}\zeta$, so liegt die Strecke PP' im Innern oder auf dem Rande von $\boldsymbol{T}$. Betrachten wir nunmehr die Gesamtheit der Koordinatenkurven, die durch die Punkte der $P = (\xi, \eta, \zeta)$ und $P' = (\xi', \eta', \zeta')$ verbindenden Strecke bestimmt sind. Aus dieser Gesamtheit greifen wir n beliebige „aufeinanderfolgende" Exemplare $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ heraus und bestimmen die $n-1$ kürzesten Abstände der Paare $\Gamma_1, \Gamma_2; \Gamma_2, \Gamma_3; \ldots; \Gamma_{n-1}, \Gamma_n$. Es sei $\mathfrak{s}_n$ ihre Summe, $\mathfrak{s}$ die untere Grenze aller $\mathfrak{s}_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ bei beliebiger Wahl der einzelnen Individuen der Schar. Augenscheinlich ist $r \geqq \mathfrak{s}$. Des weiteren ist $\mathfrak{s} \geqq \alpha^{(3)}\mathfrak{s}_*$, unter $\mathfrak{s}_*$ die Länge der durch die Schar $\boldsymbol{Z}$ vermittelten Projektion P_0P_0' der Strecke PP' auf S_0 verstanden. Schließlich ist $\mathfrak{s}_* \geqq$ der Länge der geodätischen Kurve zwischen P_0 und P_0' auf S_0, diese wiederum $\geqq \alpha^{(4)}\tilde{r}_0$, so daß sich alles in allem

$$(235) \qquad r \geqq \alpha^{(3)}\alpha^{(4)}\tilde{r}_0 = \frac{1}{\alpha^{(2)}}\tilde{r}_0$$

ergibt. Diese Ungleichheit, die zunächst für $r \leqq l^*$ abgeleitet worden ist, gilt aus Gründen der Stetigkeit bei passend gewähltem $\alpha^{(2)}$ auch für $r > l^*$.

Die Abschätzung (235) gilt für alle r in T_Ω gleichmäßig. Wie man leicht erkennt, ist in naheliegender Bezeichnungsweise

$$(236) \qquad \int\limits_{T_\Omega} \frac{1}{\tilde{r}_0}\,d\tau' < \alpha^{(5)} \int\limits_{\tilde{T}_\Omega} \frac{1}{\tilde{r}_0}\,d\tilde{\tau}' \leqq \alpha^{(5)}\Omega \int\limits_{\tilde{S}_0} \frac{1}{\tilde{r}_0}\,d\tilde{\sigma}' \leqq \alpha^{(6)}\Omega,$$

woselbst $\tilde{S}_0$ das Bild von S_0 in dem Raume ξ-η-ζ bezeichnet. Aus (234) und (236) folgt endgültig

$$(237) \qquad |V_T| < \alpha^{(7)} f \Omega.$$

Man findet weiter ohne Mühe die Abschätzungen

$$(238) \quad |V_0(\xi,\eta,0)| \leqq \alpha^{(8)} f, \quad \left|\frac{\zeta^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\mathfrak{V}(\xi,\eta,0) + \frac{\zeta^3}{3!}\frac{\partial^3\mathfrak{V}}{\partial\zeta^3} + \ldots\right| \leqq \alpha_*^{(8)}\Omega^2$$

und, wenn man

$$\text{Max}\{f, |s|\} = \Omega_1 \tag{239}$$

setzt, alles in allem

$$|\hat{\Pi}\{s, \zeta\}| \leqq \varkappa^{(9)} \Omega_1 + \alpha^{(10)} (\Omega^2 + \Omega \Omega_1). \tag{240}$$

Diese Ungleichheit entspricht der ersten der beiden Beziehungen (124). In **7.** bezeichnet Π die Gesamtheit der Glieder zweiter und höherer Ordnung in (75), während in $\hat{\Pi}$ auch die Glieder erster Ordnung mit eingeschlossen sind.

Und nun die zweite maßgebende Ungleichheit. Es sei $\dot{\zeta}$ eine beliebige stetige Ortsfunktion auf S_0, und es möge

$$|\dot{\zeta}| \leqq \Omega, \quad |\zeta - \dot{\zeta}| = \mho \leqq 2\Omega \tag{241}$$

sein. Wir finden (vgl. (232))

$$\hat{\Pi}\{s, \zeta\} - \hat{\Pi}\{s, \dot{\zeta}\} = \left\{\frac{\dot{\zeta}^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \mathfrak{V}(\xi, \eta, 0) + \ldots - \frac{\zeta^2}{2!} \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial \zeta^2} - \ldots\right\} \tag{242}$$

$$+ \{V_{\dot{T}}(\xi, \eta, \dot{\zeta}) - V_T(\xi, \eta, \zeta)\} + \{V_0(\xi, \eta, \dot{\zeta}) - V_0(\xi, \eta, \zeta)\} = J_1 + J_2 + J_3.$$

Wie sich ohne Mühe zeigen läßt, ist

$$\begin{gathered} |J_1| \leqq \alpha^{(11)} \Omega \mho, \\ V_0(\xi, \eta, \dot{\zeta}) - V_0(\xi, \eta, \zeta) = (\dot{\zeta} - \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} V_0(\xi, \eta, \zeta + \theta_1(\dot{\zeta} - \zeta)) \quad (0 < \theta_1 < 1), \end{gathered} \tag{243}$$

also

$$|J_3| \leqq \alpha^{(12)} \Omega_1 \mho. \tag{244}$$

Schließlich ist, unter Θ den von S, $\dot{S}$ und einem Teil von $\mathfrak{S}$ begrenzten Bereich verstanden, in naheliegender Bezeichnungsweise

$$\begin{aligned} V_{\dot{T}}(\xi, \eta, \dot{\zeta}) - V_T(\xi, \eta, \zeta) &= V_{\dot{T}}(\xi, \eta, \dot{\zeta}) - V_{\dot{T}}(\xi, \eta, \zeta) + V_\Theta(\xi, \eta, \zeta) \\ &= (\dot{\zeta} - \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} V_{\dot{T}}(\xi, \eta, \zeta + \theta_2(\dot{\zeta} - \zeta)) + V_\Theta(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned}$$

und nach sinngemäßer Wiederholung der vorhin bei der Abschätzung von V_T angewandten Schlüsse

$$|J_2| \leqq \varkappa^{(13)} \Omega_1 \mho.$$

Alles in allem erhalten wir somit

$$|\hat{\Pi}\{s, \zeta\} - \hat{\Pi}\{s, \dot{\zeta}\}| \leqq \varkappa^{(14)} (\Omega + \Omega_1) \mho. \tag{245}$$

An Hand der Ungleichheiten (240) und (245) läßt sich ganz wie in **9.** zeigen, daß die Funktionalgleichung (232) oder, was dasselbe bedeutet, die Funktionalgleichung (231) für hinreichend kleine Ω_1, d. h. f und $|s|$, etwa $\Omega_1 \leqq \delta^{(1)}$, eine und nur eine Lösung $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ mit $\Omega \leqq \varepsilon$ ($\varepsilon \leqq \frac{1}{2}\zeta$ hinreichend klein) hat. Die Beziehung (231) besagt, daß das Jordansche Flächenstück S, dessen Gleichung in dem von uns gebrauchten krummlinigen Koordinatensystem $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ lautet, eine Niveaufläche der in Rotation begriffenen Massenverteilung $\mathfrak{T} + T_0 + T$ darstellt.

Aus

$$(246)\quad \mathfrak{V}(\xi,\eta,\zeta)=\mathfrak{B}(\xi,\eta,\zeta)+V_0(\xi,\eta,\zeta)+V_T(\xi,\eta,\zeta)-\mathfrak{B}(\xi,\eta,0)=s$$

folgt bei festgehaltenem s

$$(247)\qquad \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\xi}+\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}=0\,,\qquad \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\eta}+\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}=0\,.$$

Für alle Gebiete T in $\boldsymbol{T}$, auch solche Gebiete, die einer Gleichgewichtskonfiguration nicht entsprechen, erfüllt, wenn f etwa $<\delta^{(2)}\leqq\delta^{(1)}$ angenommen wird, die Komponente der Schwerkraft der Gesamtverteilung in der Richtung der Koordinatenkurven die Beziehung $-\alpha^{(16)}<\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\zeta}<-\alpha^{(15)}<0$. Aus (247) folgt, daß die Funktion $\zeta(\xi,\eta)$, ausführlicher $\zeta(\xi,\eta,s)$ für alle $\Omega_1\leqq\delta^{(2)}$ stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}$ hat. *Das Flächenstück S gehört der Klasse Ah an.* Aber auch die partielle Ableitung $\frac{\partial\zeta}{\partial s}$ ist vorhanden und stetig und erfüllt beiläufig, als Funktion von ξ und η aufgefaßt, eine H-Bedingung. In der Tat folgt aus (246) durch Differentiation bei festgehaltenen ξ und η

$$(248)\qquad \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial s}=1\,,\qquad \text{darum}\qquad -\frac{1}{\alpha^{(16)}}>\frac{\partial\zeta}{\partial s}>-\frac{1}{\alpha^{(15)}}\,.$$

Die zu verschiedenen Werten von s ($|s|\leqq\delta^{(2)}$) gehörenden (verschiedenen Gleichgewichtsverteilungen entsprechenden) Flächenstücke S sind (beim festgehaltenen f) schichtweise nebeneinander gelagert.

Es sei $\mathfrak{v}(s)$ das Volumen der Flüssigkeit; $\mathfrak{v}(s)$ ist eine monoton abnehmende Funktion von s. Augenscheinlich kann man durch eine passende Wahl von s erreichen, daß $\mathfrak{v}(s)$ einen beliebig vorgeschriebenen Wert in der Nachbarschaft von $\mathfrak{v}(0)$ erhält. Damit ist unser Problem als gelöst anzusehen[74].

Ein Punkt noch bedarf freilich einer Erörterung. Es ist im vorstehenden stillschweigend angenommen worden, daß die Umdrehungsachse $x=y=0$ eine Hauptträgheitsachse des Körpers $\mathfrak{T}$ darstellt. Denn nur dann kann $\mathfrak{T}$ ohne Einwirkung geeigneter äußerer Kräfte in gleichförmiger Rotation beharren. Die Hauptträgheitsachsen von $\mathfrak{T}$ sind im allgemeinen nicht zugleich Hauptträgheitsachsen von $\mathfrak{T}+\hat{T}$, denn der Schwerpunkt von $\mathfrak{T}+\hat{T}$ wird, wie man leicht sieht, im allgemeinen nicht auf der z-Achse liegen. Demnach stellt die vorhin gefundene Konfiguration ein System dar, das sich im relativen Gleichgewicht nur nach Hinzusetzen geeigneter an $\mathfrak{T}$ angreifender Kräfte befinden wird. Auch

[74] Vgl. L. Lichtenstein, Mathematisches über die Gestalt des Weltmeeres, Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften **79** (1927), S. 197—214. A. a. O. kommen noch bei dem Prozeß der sukzessiven Approximationen partielle Ableitungen der einzelnen Näherungen zur Verwendung. Die Darstellung im Text ist darum als grundsätzlich einfacher zu betrachten.

$\mathfrak{T} + \hat{T}$ kann nur um eine seiner Hauptträgheitsachsen („freier Achsen") ohne Mitwirkung äußerer Kräfte rotieren, — sofern natürlich die hydrodynamischen Bedingungen für das relative Gleichgewicht erfüllt sind. Dies veranlaßt uns, die Problemstellung wie folgt zu modifizieren. Das aus $\mathfrak{T}$ und einem vorgeschriebenen Volumen einer Flüssigkeit geringer Dichte f bestehende System $\mathfrak{T} + \hat{T}$ rotiert frei, d. h. kräftelos, mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine in der Nachbarschaft der Geraden $x = 0$, $y = 0$ gelegene Gerade (h), die somit eine seiner Hauptträgheitsachsen darstellt; $\hat{T}$ und (h) sind zu bestimmen.

Auch dieses neue Problem läßt sich durch sukzessive Approximationen erledigen. Es genügt, bei dem Übergang von der n-ten zu der $(n+1)$-ten Näherung die Rotationsachse jedesmal entsprechend zu ändern[74a]. Hat insbesondere $\mathfrak{T}$ eine Rotationssymmetrie um die z-Achse, so gilt für die neue Konfiguration das gleiche. Die Umdrehungsachse ist eine Hauptträgheitsachse und darum eine freie Achse der Verteilung $\mathfrak{T} + \hat{T}$.

Vorhin ist die Dichte f der Flüssigkeit als gering vorausgesetzt worden. Statt dessen könnte man bei geeigneter Formgebung von $\mathfrak{T}$ die Gesamtmasse der Flüssigkeit (beliebiger Dichte) als klein im Verhältnis zur Masse des Kernes annehmen. Man vergleiche hierzu meine Arbeit: Mathematisches über die Gestalt des Weltmeeres. II, die voraussichtlich in der Mathematischen Zeitschrift erscheinen wird. Dort werden auch noch andere verwandte Probleme behandelt.

14. Flüssigkeitszylinder. Wir beschließen dieses Kapitel mit einigen Bemerkungen über die Bestimmung neuer zylindrischer Gleichgewichtsfiguren einer rotierenden homogenen Flüssigkeit in der Nachbarschaft einer gegebenen zylindrischen Gleichgewichtsfigur.

Es seien: T der Normalschnitt der Ausgangsfigur, den wir uns in der Ebene $z = 0$ gelegen denken, S seine mit stetiger Krümmung versehene Randkurve, ζ der Abstand PP_1 eines in der Umgebung von S gelegenen Punktes P_1 von dieser Kurve, positiv für Punkte des Außengebietes, negativ für diejenigen des Innengebietes gerechnet, s die von einem beliebigen Anfangspunkt Q gemessene Bogenlänge QP. Wir beziehen diesmal die Lage der Punkte der Ebene $z = 0$ in der Umgebung von S auf das System der krummlinigen Koordinaten s, ζ und bezeichnen wie früher mit f die Dichte = Masse für die Volumeneinheit, $\varkappa\psi$ die Schwerkraft in P. Durch Betrachtungen, die den auf S. 36ff. durchgeführten vollkommen analog verlaufen, erhalten wir unter Zugrundelegung des logarithmischen Potentials $2\varkappa \log \frac{\varrho_*}{\varrho}$, unter ϱ_* die Hälfte des Durch-

[74a] Man vergleiche hierzu die in Vorbereitung befindliche Leipziger Dissertation von Herrn G. Dölling. Dort finden sich die zuletzt angegebenen Überlegungen in allen Einzelheiten durchgeführt.

messers von S verstanden, zur Bestimmung von ζ in naheliegender Bezeichnungsweise die Integro-Differentialgleichung

$$(249) \qquad \psi\zeta + 2\int_S f'\zeta' \log\frac{\varrho_*}{\varrho}\,ds' = s - R^2\lambda - \frac{\omega^2}{2\varkappa}\zeta^2 - 2R\tau\lambda\zeta - \lambda\zeta^2 - \frac{1}{\varkappa}(V^{(2)} + V^{(3)} + \dots),$$

$$(250) \qquad V^{(n)} = \varkappa\frac{2}{n!}\int_S f'\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\{(\zeta'\cos\varphi_t' - \zeta\cos\theta_t')\log\frac{\varrho_*}{\varrho_t}ds_t'\}\right]_{t=0}.$$

Die lineare Integralgleichung

$$(251) \qquad \psi\zeta + 2\int_S f'\zeta'\log\frac{\varrho_*}{\varrho}ds' = 0$$

hat, wenn S keine Kreislinie um den Koordinatenursprung vom Radius ϱ_* ist, stets eine triviale Nullösung const. $\cdot\,\gamma =$ const. $(Xb - Ya)$. Diese Lösung wird illusorisch, wenn es sich um einen geraden Kreiszylinder um die z-Achse handelt, weil alsdann γ identisch verschwindet. Wie man leicht sieht, ist in dem zuletzt betrachteten Falle

$$(252) \qquad \varkappa\psi = -2\pi\varkappa f\varrho_* + \omega^2\varrho_*,$$

so daß auf alle Fälle (vgl. S. 9 und 17)

$$(253) \qquad \omega \leqq \sqrt{2\pi\varkappa f}$$

gilt. Nach bekannten Sätzen hat die Integralgleichung

$$(254) \qquad \left(\frac{\omega^2}{\varkappa} - 2\pi f\right)\varrho_*\zeta + 2\int_S f'\zeta'\log\frac{\varrho_*}{\varrho}ds' = 0$$

(nichttriviale) Nullösungen der Form const. $\cos\frac{ns}{\varrho_*}$, const. $\sin\frac{ns}{\varrho_*}$ für

$$(255) \qquad \omega^2 = 2\pi\varkappa f\frac{n-1}{n} \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Diese Verzweigungszylinder können den Ausgangspunkt neuer linearer Reihen zylindrischer Gleichgewichtsfiguren bilden. Ob dies tatsächlich der Fall ist, kann erst eine Diskussion der Verzweigungsgleichungen lehren. Ist insbesondere $\omega = 0$, handelt es sich also um den ruhenden Zylinderkörper als Ausgangsfigur, so nimmt (254) die Gestalt

$$(256) \qquad \zeta - \frac{1}{\pi\varrho_*}\int_S \zeta'\log\frac{\varrho_*}{\varrho}ds' = 0$$

an. Sie hat die beiden linear unabhängigen Nullösungen

$$(257) \qquad \mathfrak{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi\varrho_*}}\sin\frac{s}{\varrho_*}, \quad \mathfrak{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi\varrho_*}}\cos\frac{s}{\varrho_*}.$$

Nur noch einige Bemerkungen über elliptische Flüssigkeitszylinder als Ausgangsfiguren. Es seien $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{a}$ die Halbachsen der Querschnittsellipsen. Wir bestimmen vor allem den Ausdruck $\delta = \frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}$ so, daß die Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist, was, wie sich ohne Schwierig-

keiten verifizieren läßt, nach (38) I

$$\frac{\omega^2}{\pi \varkappa f} = 1 - \delta^2 \quad \text{bzw.} \quad \delta = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\pi \varkappa f}} \tag{258}$$

ergibt. Für die Schwerkraft erhält man diesmal den Ausdruck

$$\varkappa \psi = -\pi \varkappa f \boldsymbol{a} \boldsymbol{b} (1 - \delta^2) \frac{1}{p}, \qquad \frac{1}{p^2} = \frac{X^2}{\boldsymbol{a}^4} + \frac{Y^2}{\boldsymbol{b}^4}.$$

Die homogene Integralgleichung (251) nimmt jetzt die Form

$$-\pi \boldsymbol{a} \boldsymbol{b} (1 - \delta^2) \frac{\zeta}{p} + 2 \boldsymbol{a} \boldsymbol{b} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta'}{p'} \log \frac{\boldsymbol{a}}{\varrho} \, d\sigma' = 0, \tag{259}$$

unter σ die exzentrische Anomalie verstanden, an. Wie eine eingehende Untersuchung lehrt, hat (259) die für alle Werte von δ gültigen, in geeigneter Weise normierten Nullösungen

$$\mathfrak{u}_2 = \frac{p}{f} \frac{\sin 2\sigma}{\sqrt{\pi}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{u}_{2,1} = \text{const.}\, p \tag{260}$$ [74b]

und darüber hinaus für abzählbar unendlichviele sich gegen 1 häufende Werte von δ je eine nichttriviale Nullösung der Gestalt

$$\mathfrak{u}_n = \frac{p}{f} \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{\pi}} \qquad (n \geqq 3). \tag{261}$$

Die diesen singulären Werten von δ entsprechenden Ellipsen geben möglicherweise zu Verzweigungen Anlaß.

Viertes Kapitel.

Neue nichthomogene Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft einer gegebenen, nicht notwendig homogenen Gleichgewichtsfigur.

15. Problemstellung. Nachdem wir in dem dritten Kapitel eine Theorie der homogenen Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten in der Nachbarschaft einer gegebenen ebenfalls homogenen Gleichgewichtsfigur entwickelt hatten, wenden wir uns in dem Folgenden dem allgemeineren Problem zu, festzustellen, ob es in der Umgebung einer nicht notwendig homogenen Gleichgewichtsfigur neue Gleichgewichtsfiguren gibt, deren Winkelgeschwindigkeit oder Dichteverteilung, oder auch beides, sich von der Winkelgeschwindigkeit bzw. Dichteverteilung der Ausgangsfigur hinreichend wenig unterscheiden. Von besonderer Wichtigkeit ist ein ruhender nichthomogener Flüssigkeitskörper mit Kugelsymmetrie, d. h. ein Körper, der aus konzentrischen Kugelschichten konstanter

[74b] Die triviale Nullösung $\mathfrak{u}_{2,1}$ ist, wie man sich leicht überzeugt, belanglos.

Dichte besteht, als Ausgangsfigur. Eine andere spezielle Möglichkeit bieten die Jacobischen und Maclaurinschen Ellipsoide als Ausgangsfiguren[75]. Mit den beiden zuletzt charakterisierten Problemen, von denen das erste eine strenge Begründung der Clairautschen Theorie der Figur der Erde in sich schließt, hat sich bereits Liapounoff in einer Reihe umfangreicher Abhandlungen beschäftigt (vgl. loc. cit. [40]).

Wir legen unseren Betrachtungen eine mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \geqq 0$ wie ein starrer Körper rotierende Gleichgewichtsfigur T einer gravitierenden Flüssigkeit zugrunde, die folgende Eigenschaften hat.

1. Die Berandung von T besteht aus einer einzigen Jordanschen Fläche S vom topologischen Typus einer Kugel, die ein bestimmtes Volumen im Sinne von Peano und Jordan einschließt. Die Dichte f ist eine stetige, allenfalls abteilungsweise stetige Ortsfunktion, die gewissen weiteren, alsbald anzugebenden Bedingungen genügt. Es sei bemerkt, daß für die Gültigkeit vieler unserer Ergebnisse die von Liapounoff eingeführte Voraussetzung, f nehme von außen nach innen nicht ab, nicht benötigt wird. Diese Annahme wird darum erst später gelegentlich eingeführt werden.

2. Die Flächen konstanten Gesamtpotentials $U = \text{const.}$ bilden eine Schar ineinandergeschachtelter Jordanscher Flächen vom Kugeltypus, die wie S ein bestimmtes Volumen im Sinne von Peano und Jordan haben. Sie konvergieren gegen einen Punkt, der auf der Umdrehungsachse liegt und O heißen möge. Wir wählen ihn zum Koordinatenursprung.

3. Die Schwerkraft verschwindet nur in O. Demnach ist

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 > 0 \quad \text{für alle } (x, y, z) \tag{1}$$
$$\text{mit } x^2 + y^2 + z^2 > 0 \text{ in } T + S.$$

Wegen (1) sind Niveauflächen des Gesamtpotentials allemal Flächen mit stetiger Normale[76]. In der Tat läßt sich die Gleichung

$$U(x, y, z) = c \qquad (c \text{ konstant}) \tag{2}$$

wegen (1), falls etwa $\frac{\partial U}{\partial z} \neq 0$ ist, nach z auflösen, und die Funktion $z = z(x, y)$ hat stetige, übrigens, da, wie wir wissen, V eine H-Bedingung mit beliebigem Exponenten < 1 erfüllt, der H-Bedingung genügende

[75] Vgl. meine kürzlich erschienene Arbeit, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Dritte Abhandlung. Nichthomogene Flüssigkeiten. Figur der Erde, Math. Zeitschr. **36** (1933), S. 481—562. Man vgl. im Anschluß daran die Note von E. Hölder, Zur Theorie inhomogener Gleichgewichtsfiguren. 1. Mitteilung. Homogene Ausgangsfiguren, ebenda S. 563—580.

[76] Die sich auf den Punkt O reduzierende „Niveaufläche" bleibt hierbei außer Betracht.

Ableitungen erster Ordnung. Die Niveauflächen gehören der Klasse Ah an.

Nach Voraussetzung ist T eine Gleichgewichtsfigur. Da die wirkenden Kräfte von einem Potential herrühren, so müssen (vgl. **2.**) die Flächen gleichen Potentials zugleich Flächen gleicher Dichte sein. Ist, wie wir voraussetzen wollen, auf S durchweg $\frac{\partial U}{\partial \nu} < 0$, so ist wegen (1) in $T+S$ überall, außer in dem Koordinatenursprung, $\frac{\partial U}{\partial \nu} < 0$. Die Schwerkraft fällt allemal in die Innennormale hinein. Es sei jetzt Γ das zwischen O und S gelegene Stück der positiven z-Achse. Sei $\mathfrak{r}$ der längs Γ gemessene Abstand einer Niveaufläche von O, $\mathfrak{l}$ die Gesamtlänge von Γ. Beim Fortschreiten längs Γ von S nach O nimmt der Druck, wie aus der bekannten Beziehung $f\frac{\partial U}{\partial \nu} = \frac{\partial p}{\partial \nu}$ folgt, da doch $f > 0$ ist, monoton zu.

4. Wir nehmen an, daß die Dichte f sich in $T+S$ nur längs einer endlichen Anzahl geschlossener Flächen (die notwendigerweise Niveauflächen von U sein müssen) sprungweise ändern kann, in jedem Stetigkeitsbereich, der Rand eingeschlossen, aber einer H-Bedingung genügt. Alsdann hat nach bekannten Sätzen (vgl. **1.** 3) das Gravitationspotential $\varkappa V$, mithin auch

$$(3) \qquad U(x,y,z) = \varkappa V(x,y,z) + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) = \varkappa \int_T f' \frac{1}{\varrho} d\tau' + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)$$

stetige, einer H-Bedingung (mit dem gleichen Exponenten) genügende Ableitungen zweiter Ordnung. Die Niveauflächen sind Flächen der Klasse Bh (vgl. S. 12).

Wir werden übrigens meist annehmen, daß f in jedem der (endlich vielen) Stetigkeitsbereiche stetige Ableitungen erster Ordnung hat. Aus Gründen der Symmetrie (vgl. 5.) sind alsdann $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ und darum auch $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ in O gleich Null. Darüber hinaus soll $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ in einer Umgebung von O einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\mu < 1$ genügen. Dies hat wiederum zur Folge, daß $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ sich in der Umgebung des Koordinatenursprunges wie r^{μ} $(0 < \mu < 1)$ $(r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$ verhält.

5. Die Konfiguration hat eine auf der Rotationsachse senkrechte Symmetrieebene und $k \geqq 2$ den Winkel $\frac{\pi}{k}$ miteinander einschließende, durch die Rotationsachse hindurchgehende Symmetrieebenen. Offenbar ist der Koordinatenursprung O der Schnittpunkt aller dieser Ebenen; er ist zugleich der Schwerpunkt des Systems. Die Ebene $z=0$ ist gewiß eine Symmetrieebene. Wir denken uns das Achsenkreuz so orientiert, daß auch die Ebene $y=0$ Symmetrieebene wird.

Nimmt die Dichte beim Fortschreiten längs Γ von S nach O hin monoton zu oder zum mindesten nicht ab, wobei auch Konstanzinter-

valle vorkommen dürfen, so ist eine auf der Rotationsachse senkrechte Symmetrieebene gewiß vorhanden (vgl. **5.**).

6. Die Orthogonaltrajektorien der Schar der Niveauflächen, die augenscheinlich sämtlich in O münden, stellen, wie wir weiter annehmen wollen, Linienstücke dar, die mit Einschluß ihres Endpunktes O stetige und gleichmäßig beschränkte Krümmung besitzen. Diese Voraussetzung wird übrigens nur im Falle einer nichthomogenen Ausgangsfigur benutzt.

Es sei, wie vorhin, Γ der zwischen O und S enthaltene Teil der positiven z-Achse, und es möge wiederum $\mathfrak{r}$ die Länge desjenigen Stückes von Γ bezeichnen, das zwischen dem Koordinatenursprung und dem Schnittpunkt von Γ mit einer bestimmten Niveaufläche enthalten ist. Da Γ jede Niveaufläche in einem einzigen Punkte trifft, so ist durch die Angabe von $\mathfrak{r}$ die fragliche Äquipotentialfläche eindeutig festgelegt. Wir nennen sie dementsprechend $S_{\mathfrak{r}}$. Augenscheinlich kann man die Dichte der Flüssigkeit, die ja auf $S_{\mathfrak{r}}$ überall den gleichen Wert hat, als Funktion von $\mathfrak{r}$ auffassen. Wir werden uns demgemäß gelegentlich der Bezeichnung $f = f(\mathfrak{r})$ bedienen. Ist, wie früher, $\mathfrak{l}$ die Gesamtlänge von Γ, so könnte die Randfläche von T sinngemäß mit $S_{\mathfrak{l}}$ bezeichnet werden. Der Einfachheit halber werden wir für $S_{\mathfrak{l}}$, wie bis jetzt, S schreiben. Es sei ξ, η ein System auf S erklärter Gaußscher Parameter der Fläche. Wir denken uns ξ, η so gewählt, daß die Koordinaten X, Y, Z der Punkte auf S, als Funktionen von ξ, η aufgefaßt,

$$(4) \qquad X = X(\xi, \eta), \quad Y = Y(\xi, \eta), \quad Z = Z(\xi, \eta),$$

stetige Ableitungen erster und stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen zweiter Ordnung haben. Man darf des weiteren, wie wir es tun wollen, annehmen, daß die drei Jacobischen Determinanten

$$(5) \qquad \frac{\partial(X, Y)}{\partial(\xi, \eta)}, \quad \frac{\partial(X, Z)}{\partial(\xi, \eta)}, \quad \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(\xi, \eta)}$$

nicht gleichzeitig verschwinden. Durch das Bündel der Orthogonaltrajektorien wird $S_{\mathfrak{r}}$ $(0 < \mathfrak{r} \leqq \mathfrak{l})$ auf S umkehrbar eindeutig und stetig bezogen. Augenscheinlich kann man ξ, η auch als Gaußsche Parameter auf $S_{\mathfrak{r}}$ betrachten und für die Koordinaten x, y, z der Punkte auf $S_{\mathfrak{r}}$ demgemäß schreiben:

$$(6) \qquad x = x(\xi, \eta, \mathfrak{r}), \quad y = y(\xi, \eta, \mathfrak{r}), \quad z = z(\xi, \eta, \mathfrak{r}).$$

Es sei P_1 ein beliebiger Punkt in der Nachbarschaft von $S_{\mathfrak{r}}$, und es möge P den Fußpunkt des von P_1 auf $S_{\mathfrak{r}}$ gefällten Lotes bezeichnen[77]. Der Abstand PP_1, positiv in der Richtung der Außennormale (ν) zu $S_{\mathfrak{r}}$

---

[77] Sollten von P_1 mehrere Lote auf $S_{\mathfrak{r}}$ gefällt werden können, so soll P ein Fußpunkt sein, dem der Kleinstwert des Abstandes PP_1 entspricht. Ist die Umgebung von $S_{\mathfrak{r}}$, in der P_1 liegt, hinreichend nahe, so ist nunmehr P vollkommen bestimmt.

in P gerechnet, heiße ζ; wir können ξ, η, ζ als krummlinige Koordinaten von P_1 auffassen. Es seien a, b, c die Richtungskosinus der Außennormale (ν). Als Funktionen der Koordinaten x, y, z des Punktes P aufgefaßt, sind a, b, c, wie man leicht zeigen kann, in $T+S$, außer im Punkte O, dem Koordinatenursprunge, stetig und haben daselbst stetige oder zum mindesten abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial a}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial c}{\partial z}$.[78] In der Umgebung von O sind a, b, c noch beschränkt, während, wie weiter angenommen werden soll, die vorhin genannten partiellen Ableitungen sich daselbst wie r^{-1} verhalten[79]. Für die kartesischen Koordinaten x_1, y_1, z_1 des Punktes P_1 erhalten wir die Ausdrücke

$$x_1 = x + a\zeta, \quad y_1 = y + b\zeta, \quad z_1 = z + c\zeta. \tag{7}$$

Nach allen diesen Vorbereitungen gehen wir nunmehr zu unserem Problem über. *Es handelt sich, wie eingangs bemerkt, um die Bestimmung einer Gleichgewichtsfigur* $T_1 + S_1$, *die,* um es kurz auszudrücken, *was ihre Stetigkeits- und Symmetrieeigenschaften betrifft, im wesentlichen wie* $T+S$ *beschaffen ist, in einer Umgebung erster Ordnung von* $T+S$ *liegt und zu einem von* ω *nur wenig verschiedenen Werte* ω_1 *der Winkelgeschwindigkeit gehört.* Wir denken uns T_1+S_1 auf $T+S$ in einer später noch genauer anzugebenden Weise derart topologisch abgebildet, daß Niveauflächen des Gesamtpotentials, S_τ und $S_{\tau 1}$, einander umkehrbar eindeutig und stetig entsprechen, ein Punkt P auf S_τ allemal auf den Schnittpunkt P_1 der Normale (ν) zu S_τ in P mit $S_{\tau 1}$, insbesondere der Koordinatenursprung auf sich selbst abgebildet wird. Die Symmetrieebenen von $T+S$ sollen zugleich Symmetrieebenen der Konfiguration T_1+S_1 bilden.

Die Abbildung des Bereiches T_1+S_1 auf den Bereich $T+S$ kann als bekannt gelten, sobald ζ, der Abstand korrespondierender Punkte P und P_1, als Ortsfunktion in $T+S$ bestimmt ist. Wir schreiben

$$\zeta = \zeta(x, y, z) \tag{8}$$

und machen bezüglich $\zeta(x, y, z)$ folgende spezielle Annahmen. Die Funktion $\zeta(x, y, z)$ ist in $T+S$ stetig, verschwindet im Koordinatenursprunge,

$$\zeta(0, 0, 0) = 0, \tag{9}$$

nimmt in den in bezug auf die $k+1$ Symmetrieebenen symmetrisch liegenden Punkten die gleichen Werte an und hat beschränkte und, außer möglicherweise in dem Koordinatenursprunge und auf den Un-

[78] Als mögliche Unstetigkeitsflächen kommen die Flächen, an denen sich f sprungweise ändert, in Frage.

[79] Wir lassen es dahingestellt sein, wie weit die verschiedenen vorhin eingeführten Voraussetzungen voneinander unabhängig sind.

stetigkeitsflächen von f, wo sie sich sprungweise ändern können, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Schließlich ist, unter ε_0 einen hinreichend kleinen positiven Wert verstanden, in $T+S$

$$\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right|, \quad \left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right| \leqq \varepsilon_0. \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt, wie man fast unmittelbar sieht[80],

$$|\zeta| \leqq \sqrt{3}\,\varepsilon_0 r \quad (r^2 = x^2+y^2+z^2), \quad \text{somit auch} \quad |\zeta| \leqq \alpha_1\varepsilon_0, \tag{11}$$

wo α_1 eine Konstante bezeichnet, wie später $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Für (11) könnte man natürlich ebensogut auch $|\zeta| \leqq \alpha_2\varepsilon_0\,\mathfrak{r}$ schreiben. Durch die Ungleichheiten (10) und (11) ist zum Ausdruck gebracht worden, daß die Konfiguration T_1+S_1 in der Nachbarschaft erster Ordnung von $T+S$ liegen soll.

Das Bild $S_{\mathfrak{r}1}$ von $S_\mathfrak{r}$ in T_1+S_1 ist nach Voraussetzung eine Niveaufläche des Gesamtpotentials der gesuchten neuen Flüssigkeitsverteilung. Demnach hat auf $S_{\mathfrak{r}1}$ die Flüssigkeitsdichte überall den gleichen Wert. Wir bezeichnen die Dichte in T_1, als Ortsfunktion in T aufgefaßt, mit $f(\tau)+\alpha\chi(\tau)$, unter α einen dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Wert, unter $\chi(\tau)$ eine stetige, allenfalls abteilungsweise stetige Funktion, die in jedem Stetigkeitsbereich einer H-Bedingung genügt, verstanden. Für $f(\tau)+\alpha\chi(\tau)$ können wir auch $f(\mathfrak{r})+\alpha\chi(\mathfrak{r})$ schreiben.

Nach Voraussetzung sind $S_\mathfrak{r}$ Flächen gleichen Gesamtpotentials. Demnach ist in P auf $S_\mathfrak{r}$

$$U = \varkappa\int_T f'\frac{1}{\varrho}\,d\tau' + \frac{\omega^2}{2}\mathfrak{r}^2 = C = C(\mathfrak{r}), \qquad \mathfrak{r}^2 = x^2+y^2. \tag{12}$$

Wie durch die Bezeichnung $C = C(\mathfrak{r})$ angedeutet wird, hängt der auf $S_\mathfrak{r}$ konstante Wert des Gesamtpotentials seinerseits von $\mathfrak{r}$ ab. In dem Punkte P_1 auf der Niveaufläche $S_{\mathfrak{r}1}$ der neuen Konfiguration gilt entsprechend

$$U_1 = \varkappa\int_{T_1}(f'+\alpha\chi')\frac{1}{\varrho_1}\,d\tau_1' + \frac{\omega_1^2}{2}\mathfrak{r}_1^2 = C_1 = C_1(\mathfrak{r}),\text{[81]} \tag{13}$$

$$\varrho_1^2 = (x_1-x_1')^2+(y_1-y_1')^2+(z_1-z_1')^2, \quad \mathfrak{r}_1^2 = x_1^2+y_1^2, \quad d\tau_1' = dx_1'dy_1'dz_1', \tag{14}$$

wofür man in bekannter Weise mit Rücksicht auf (7) auch

$$\varkappa\int_T(f'+\alpha\chi')\frac{1}{\varrho_1}\,\frac{\partial(x'+a'\zeta',\, y'+b'\zeta',\, z'+c'\zeta')}{\partial(x',y',z')}\,d\tau' + \frac{\omega_1^2}{2}\mathfrak{r}_1^2 = C_1 \tag{15}$$

---

[80] Man beachte, daß, unter (l) eine beliebige Richtung verstanden, $\left|\frac{\partial\zeta}{\partial l}\right| \leqq \sqrt{3}\,\varepsilon_0$ gilt.

[81] In (13) bezeichnen f' und χ' die zu τ' gehörigen Werte der Dichte und der Ortsfunktion $\chi(\tau)$.

schreiben kann[82]. Aus (12) und (13) folgt

$$(16)\qquad \varkappa\int\limits_{T_1} f'\frac{1}{\varrho_1}\,d\tau_1' - \varkappa\int\limits_{T} f'\frac{1}{\varrho}\,d\tau' + \alpha\varkappa\int\limits_{T_1}\chi'\frac{1}{\varrho_1}\,d\tau_1' + \frac{\omega_1^2}{2}\mathfrak{r}_1^2 - \frac{\omega^2}{2}\mathfrak{r}^2 = C_1 - C = \varkappa s = \varkappa s(\mathfrak{r})$$

16. Die fundamentale Integro-Differentialgleichung. Wir setzen

$$(17)\qquad \mathfrak{W} = \varkappa V = \varkappa\int\limits_{T} f'\frac{1}{\varrho}\,d\tau', \qquad \mathfrak{W}_1 = \varkappa\int\limits_{T_1} f'\frac{1}{\varrho_1}\,d\tau_1'$$

und beweisen, daß der Ausdruck $\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W}$ *sich für alle den Ungleichheiten (10) und (11) genügenden, wie vorhin angegeben beschaffenen Funktionen ζ in eine unbedingt und gleichmäßig konvergierende Reihe*

$$(18)\qquad \mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W} = \mathfrak{W}^{(1)} + \mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots$$

entwickeln läßt, die folgende Eigenschaften hat:

1. Es ist

$$(19)\qquad \mathfrak{W}^{(n)} = \varkappa\int\limits_{T}\frac{1}{\varrho^n}\,\mathfrak{K}^{(n)}\,d\tau',$$

unter $\mathfrak{K}^{(n)}$ eine Form n-ten Grades der Variablen $\zeta, \zeta', \frac{\partial\zeta'}{\partial x'}, \frac{\partial\zeta'}{\partial y'}, \frac{\partial\zeta'}{\partial z'}$ verstanden. Die Variablen $\frac{\partial\zeta'}{\partial x'}, \frac{\partial\zeta'}{\partial y'}, \frac{\partial\zeta'}{\partial z'}$ gehen in $\mathfrak{K}^{(n)}$ übrigens nur linear ein.

2. Es gilt

$$(20)\qquad \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial\mathfrak{W}^{(n)}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial\mathfrak{W}^{(n)}}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial\mathfrak{W}^{(n)}}{\partial z}.$$

Auch diese unendlichen Reihen konvergieren unbedingt und gleichmäßig. Präziser: die Reihen $\sum|\mathfrak{W}^{(n)}|$, $\sum\left|\frac{\partial\mathfrak{W}^{(n)}}{\partial x}\right|$, $\sum\left|\frac{\partial\mathfrak{W}^{(n)}}{\partial y}\right|$, $\sum\left|\frac{\partial\mathfrak{W}^{(n)}}{\partial z}\right|$ konvergieren gleichmäßig.

Die Reihen (18) und (20) konvergieren, wie gleichzeitig gezeigt werden wird, auch wenn man unter ζ eine *komplexe*, den vorhin angegebenen Stetigkeits- und Symmetriebedingungen genügende Funktion versteht. Als *Definition* von $\mathfrak{W}_1$ ist diesmal die Formel

$$(21)\qquad \mathfrak{W}_1 = \varkappa\int\limits_{T} f'\frac{1}{\varrho_1}\,\frac{\partial(x'+a'\zeta', y'+b'\zeta', z'+c'\zeta')}{\partial(x', y', z')}\,d\tau'$$

anzusehen.

Der Beweis läßt sich wie bei den analogen Betrachtungen des dritten Kapitels führen. Neben den beiden Flächenscharen $S_\mathfrak{r}$ und $S_{\mathfrak{r}1}$ betrachten wir die noch von einem weiteren Parameter t $(0 \leqq t \leqq 1)$ ab-

[82] Die in (15) auftretende Jacobische Determinante ist in $T + S$ beschränkt und, außer höchstens in dem Koordinatenursprunge und auf den Sprungflächen von f, stetig.

hängige, also zweiparametrige Flächenschar $S_{\mathfrak{r}t}$, die sich symbolisch in der Form $S_\mathfrak{r} + t(S_{\mathfrak{r}1} - S_\mathfrak{r})$ darstellen läßt. Dem Punkte P auf $S_\mathfrak{r}$ entspricht dabei auf $S_{\mathfrak{r}t}$ der Punkt mit den Koordinaten

$$x + at\zeta, \quad y + bt\zeta, \quad z + ct\zeta. \tag{22}$$

Durch die Zuordnung $P \to P_t$ wird der Bereich $T + S$ umkehrbar eindeutig und stetig auf einen Bereich $T_t + S_t$ abgebildet, S_t ist das Bild der Randfläche S von T. Die Schar $S_{\mathfrak{r}t}$ hat, wie man sich unmittelbar überzeugt, die gleichen topologischen, Stetigkeits- und Symmetrieeigenschaften wie die Schar $S_\mathfrak{r}$. Insbesondere ist das Bild des Punktes O dieser Punkt selbst.

Wir denken uns jetzt den Körper $T_t + S_t$ mit Masse der Dichte f' in P'_t erfüllt und bezeichnen das Gravitationspotential der neuen Konfiguration im Punkte P_t mit $\mathfrak{W}_t$. Es ist demnach

$$\mathfrak{W}_t = \varkappa \int_T f' \frac{1}{\varrho_t} \frac{\partial(x' + a' t\zeta', y' + b' t\zeta', z' + c' t\zeta')}{\partial(x', y', z')} d\tau', \tag{23}$$

$$\varrho_t^2 = [x' - x + t(a'\zeta' - a\zeta)]^2 + [y' - y + t(b'\zeta' - b\zeta)]^2 + [z' - z + t(c'\zeta' - c\zeta)]^2. \tag{24}$$

Wie man leicht verifiziert, ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x' + a' t\zeta', y' + b' t\zeta', z' + c' t\zeta')}{\partial(x', y', z')} &= 1 + t\left\{\frac{\partial}{\partial x'}(a'\zeta') + \frac{\partial}{\partial y'}(b'\zeta') + \frac{\partial}{\partial z'}(c'\zeta')\right\} \\ &+ t^2\left\{\frac{\partial(a'\zeta', b'\zeta')}{\partial(x', y')} + \frac{\partial(a'\zeta', c'\zeta')}{\partial(x', z')} + \frac{\partial(b'\zeta', c'\zeta')}{\partial(y', z')}\right\} + t^3 \frac{\partial(a'\zeta', b'\zeta', c'\zeta')}{\partial(x', y', z')}, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \frac{\varrho_t^2}{\varrho^2} &= 1 + 2t\left\{\frac{x' - x}{\varrho} \frac{(a' - a)\zeta' + a(\zeta' - \zeta)}{\varrho} + \ldots\right\} \\ &+ t^2\left\{\left(\frac{(a' - a)\zeta' + a(\zeta' - \zeta)}{\varrho}\right)^2 + \ldots\right\} = 1 + k(t). \end{aligned} \tag{26}$$

Es seien: t^* eine Zahl > 1 und k^* ein positiver echter Bruch. Wie sich ohne ernstliche Schwierigkeiten zeigen läßt, ist für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen reellen oder komplexen Werte von ζ, $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$, etwa

$$\left|\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right| \leqq \varepsilon < \varepsilon_0, \tag{27}$$

mithin wegen $\zeta(0, 0, 0) = 0$ auch $|\zeta| \leqq \sqrt{3}\,\varepsilon r$ und alle reellen oder komplexen t in dem Bereiche $|t| \leqq t^*$

$$|k(t)| \leqq k^*. \tag{28}$$

Der Quotient $\left|\frac{\varrho_t}{\varrho}\right|$ ist also von Null verschieden[83].

---

[83] Vgl. loc. cit. [75], S. 493—494. Einige Vorsicht erfordert die Behandlung des Quotienten (26) in der Umgebung des Koordinatenursprunges. Als wesentlich erweist sich hierbei der Umstand, daß $\frac{\partial a}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial c}{\partial z}$ in der Umgebung des Anfangpunktes höchstens wie r^{-1} unendlich werden können.

Der Integralausdruck $\mathfrak{W}_t$ ist eine in dem Gebiete $|t| < t^*$ analytische und reguläre Funktion von t. Dies erkennt man leicht wie folgt. Man setze

$$(29)\qquad \mathfrak{W}_t = \varkappa \int_T = \varkappa \int_{T-\overline{T}} + \varkappa \int_{\overline{T}},$$

unter $\overline{T}$ den in dem Kugelkörper $(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 \leqq \overline{D}^2$ enthaltenen Teil von T verstanden. Das Integral $\int\limits_{T-\overline{T}}$ ist, wie man unmittelbar sieht, eine in $|t| < t^*$ analytische und reguläre Funktion von t. Berücksichtigt man, daß $\int\limits_{\overline{T}}$ für alle (x, y, z) in $T+S$, alle wie vorhin angegeben beschaffenen reellen oder komplexen ζ und alle t in $|t| \leqq t^*$ für $\overline{D} \to 0$ gleichmäßig verschwindet, daß mithin gleichmäßig $\int\limits_T = \lim\limits_{\overline{D}\to 0} \int\limits_{T-\overline{T}}$ gilt, so erhält man in der Tat unsere Behauptung.

Nach bekannten Sätzen ist für $|t| < t^*$ und für alle n $(\geqq 0)$

$$(30)\qquad \frac{\partial^n \mathfrak{W}_t}{\partial t^n} = \lim_{\overline{D}\to 0} \varkappa \int\limits_{T-\overline{T}} f' \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left\{ \frac{1}{\varrho_t} \frac{\partial(x'+a't\zeta', y'+b't\zeta', z'+c't\zeta')}{\partial(x', y', z')} \right\} d\tau'$$

$$= \varkappa \int\limits_T f' \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left\{ \frac{1}{\varrho_t} \frac{\partial(x'+a't\zeta', y'+b't\zeta', z'+c't\zeta')}{\partial(x', y', z')} \right\} d\tau'.$$

Der Taylor-Cauchysche Entwicklungssatz liefert wegen $[\mathfrak{W}_t]_{t=0} = \mathfrak{W}$ mit Rücksicht auf (30)

$$(31)\qquad \mathfrak{W}_t = \mathfrak{W} + \mathfrak{W}^{(1)} t + \mathfrak{W}^{(2)} t^2 + \ldots + \mathfrak{W}^{(n)} t^n + \ldots,$$

$$(32)\qquad \mathfrak{W}^{(n)} = \frac{1}{n!} \varkappa \int\limits_T f' \left\{ \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[\frac{1}{\varrho_t} \frac{\partial(x'+a't\zeta', y'+b't\zeta', z'+c't\zeta')}{\partial(x', y', z')} \right] \right\}_{t=0} d\tau',$$

und für $t=1$, da $[\mathfrak{W}_t]_{t=1} = \mathfrak{W}_1$ ist, wie behauptet,

$$(33)\qquad \mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W} = \mathfrak{W}^{(1)} + \mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots.$$

Man verifiziert leicht, daß $\mathfrak{W}^{(n)}$ tatsächlich die auf S. 97 angegebene Form hat. Es ließe sich ohne Mühe zeigen, daß die Reihe (33) in bezug auf x, y und z gliedweise differentiiert werden kann, doch wollen wir uns dabei nicht aufhalten. (Vgl. übrigens die Betrachtungen auf S. 45.)

Wir wollen jetzt die in (32) angedeuteten Rechnungen für $n=1$ tatsächlich durchführen. Wegen (25) ist zunächst

$$(34)\qquad \mathfrak{W}^{(1)} = \varkappa \int\limits_T f' \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\varrho_t} \frac{\partial(x'+a't\zeta', y'+b't\zeta', z'+c't\zeta')}{\partial(x', y', z')} \right] \right\}_{t=0} d\tau'$$

$$= \varkappa \int\limits_T f' \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\varrho_t} \right\}_{t=0} d\tau' + \varkappa \int\limits_T f' \frac{1}{\varrho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'}(a'\zeta') + \frac{\partial}{\partial y'}(b'\zeta') + \frac{\partial}{\partial z'}(c'\zeta') \right\} d\tau'.$$

Des weiteren ist, wie man leicht sieht, wegen (26)

$$(35)\qquad \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\varrho_t}\right)\right\}_{t=0} = -\left[\frac{\frac{1}{2}\frac{\partial \varrho_t^2}{\partial t}}{\varrho_t^3}\right]_{t=0} = -\frac{1}{\varrho^3}\{(x'-x)(a'\zeta'-a\zeta)$$
$$+(y'-y)(b'\zeta'-b\zeta)+(z'-z)(c'\zeta'-c\zeta)\} = -\zeta'\frac{\cos\theta}{\varrho^2}+\zeta\frac{\cos\varphi}{\varrho^2}.$$

In (35) bezeichnet θ den von dem Vektor PP' mit der Außennormale (ν') zu $S_{\mathfrak{r}'}$ in P' eingeschlossenen Winkel, φ ist der Winkel, welchen der gleiche Vektor mit der Außennormale zu $S_{\mathfrak{r}}$ in P einschließt[84]. Aus (34) und (35) folgt, wenn, wie wir jetzt annehmen wollen, f stetig ist und stetige oder zum mindesten abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat, nach einer teilweisen Integration[85] in bekannter Weise (vgl. loc. cit.[75] S. 496)

$$(36)\quad \mathfrak{W}^{(1)} = \zeta\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \nu} - \varkappa\int_T f'\zeta'\frac{\cos\theta}{\varrho^2}\,d\tau' + \varkappa\int_S f'\frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma' - \varkappa\int_T \zeta' f'\frac{\partial}{\partial\nu'}\left(\frac{1}{\varrho}\right)d\tau'$$
$$-\varkappa\int_T \zeta'\frac{\partial f'}{\partial\nu'}\frac{1}{\varrho}\,d\tau'$$

und, da $\frac{\partial}{\partial\nu'}\left(\frac{1}{\varrho}\right) = -\frac{1}{\varrho^2}\cos\theta$ ist, alles in allem

$$(37)\qquad \mathfrak{W}^{(1)} = \zeta\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \nu} + \varkappa\int_S f'\frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma' - \varkappa\int_T \zeta'\frac{\partial f'}{\partial\nu'}\frac{1}{\varrho}\,d\tau'.$$

Vorhin ist f stetig vorausgesetzt worden. Es möge nunmehr demgegenüber f auf einer bestimmten Niveaufläche $\mathfrak{S}$ eine sprungweise Unstetigkeit erleiden[86] und im übrigen in jedem Stetigkeitsbereiche, der Rand allemal eingeschlossen, stetige Ableitungen erster Ordnung haben. Jetzt finden wir, wie man leicht bestätigt,

$$(38)\quad \mathfrak{W}^{(1)} = \zeta\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \nu} - \varkappa\int_T \zeta'\frac{\partial f'}{\partial\nu'}\frac{1}{\varrho}\,d\tau' + \varkappa\int_S f'\frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma' - \varkappa\int_{\mathfrak{S}} [f']\frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma',$$

unter $[f']$ den Sprungwert der Dichte auf $\mathfrak{S}$ verstanden, in naheliegender Schreibweise $[f'] = f(\mathfrak{r}'+0) - f(\mathfrak{r}'-0)$. Übrigens könnte man in den über S und $\mathfrak{S}$ erstreckten Integralen f', das ja dort konstant ist, vor das Zeichen des Integrals setzen. Eine ganz analoge Formel erhält man, wenn f auf einer endlichen Anzahl von Niveauflächen einen Sprung erleidet; unter $\mathfrak{S}$ ist diesmal die Gesamtheit der Unstetigkeitsflächen zu verstehen.

---

[84] Die Niveaufläche durch P', die zu dem Werte $\mathfrak{r}'$ des Parameters gehören mag, ist im Text sinngemäß mit $S_{\mathfrak{r}'}$ bezeichnet worden. Natürlich kann auch $S_{\mathfrak{r}'}$ mit $S_{\mathfrak{r}}$ identisch sein.

[85] Es handelt sich um eine Anwendung der Gaußschen Formel. Man beachte, daß $a'^2+b'^2+c'^2=1$ ist.

[86] Die etwaigen Sprungflächen sind, wie man sich leicht überzeugt, allemal Niveauflächen des Gesamtpotentials.

Wir setzen zur Vereinfachung

$$(39)\qquad \frac{\omega_1^2-\omega^2}{2\varkappa}=\lambda$$

und finden

$$(40)\qquad \frac{\omega_1^2}{2}\mathfrak{r}_1^2-\frac{\omega^2}{2}\mathfrak{r}^2=\frac{\omega_1^2}{2}(\mathfrak{r}_1^2-\mathfrak{r}^2)+\frac{\omega_1^2-\omega^2}{2}\mathfrak{r}^2=\varkappa\lambda\mathfrak{r}^2+\frac{\omega_1^2}{2}\{(x+a\zeta)^2$$
$$+(y+b\zeta)^2-x^2-y^2\}=\varkappa\lambda\mathfrak{r}^2+\frac{\omega_1^2}{2}\zeta^2(a^2+b^2)+(\omega^2+2\varkappa\lambda)\,\zeta\,(ax+by).$$

Aus (17), (18), (16), (37) und (40) folgt jetzt

$$(41)\qquad \zeta\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial\nu}+\varkappa\int\limits_S f'\frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma'-\varkappa\int\limits_T\zeta'\frac{\partial f'}{\partial\nu'}\frac{1}{\varrho}\,d\tau'=\varkappa s-\mathfrak{W}^{(2)}-\mathfrak{W}^{(3)}-\dots$$
$$-\varkappa\alpha\int\limits_{T_1}\chi'\frac{1}{\varrho_1}d\tau_1'-\varkappa\lambda\mathfrak{r}^2-\frac{\omega_1^2}{2}\zeta^2(a^2+b^2)-(\omega^2+2\varkappa\lambda)\,\zeta\,(ax+by)\,.$$

Der Ausdruck $\omega^2(ax+by)$ ist augenscheinlich gleich $\omega^2\mathfrak{r}$ multipliziert mit dem Kosinus desjenigen Winkels, den (ν) mit dem Lot von (x, y, z) auf die z-Achse, nach (x, y, z) hin gerichtet, einschließt. Wir schreiben

$$\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial\nu}+\omega^2(ax+by)=\varkappa\psi\,.$$

Offenbar ist $\varkappa\psi$ die Schwerkraft im Punkte (x, y, z). Nach Voraussetzung ist in $T+S$, außer in dem Koordinatenursprunge, $\psi<0$. Wir nehmen an, daß in der Umgebung des Anfangspunktes ψ wie $\mathfrak{r}$ oder, was dasselbe bedeutet, wie r verschwindet. Die Gleichung (41) erhält jetzt nach Division mit $\varkappa$ die Gestalt

$$(42)\qquad \psi\zeta+\int\limits_S f'\frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma'-\int\limits_T\zeta'\frac{\partial f'}{\partial\nu'}\frac{1}{\varrho}\,d\tau'=s-\alpha\int\limits_{T_1}\chi'\frac{1}{\varrho_1}d\tau_1'-\lambda\mathfrak{r}^2$$
$$-\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2)-2\lambda\zeta\,(ax+by)-\frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)}+\mathfrak{W}^{(3)}+\dots).$$

Ist f' abteilungsweise stetig, so tritt links noch der Summand $-\int\limits_{\mathfrak{S}}[f']\frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma'$ hinzu, so daß wir finden:

$$(43)\qquad \psi\zeta+\int\limits_S f'\frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma'-\int\limits_{\mathfrak{S}}[f']\frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma'-\int\limits_T\zeta'\frac{\partial f'}{\partial\nu'}\frac{1}{\varrho}\,d\tau'=s-\alpha\int\limits_{T_1}\chi'\frac{1}{\varrho_1}d\tau_1'$$
$$-\lambda\mathfrak{r}^2-\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2)-2\lambda\zeta\,(ax+by)-\frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)}+\mathfrak{W}^{(3)}+\dots).$$

Dies ist die fundamentale Integro-Differentialgleichung, die den weiteren Betrachtungen zugrunde gelegt werden soll.

Ist die Dichte in T konstant, handelt es sich also insbesondere um die Bestimmung *schwach inhomogener Gleichgewichtsverteilungen in der Nachbarschaft einer gegebenen homogenen Gleichgewichtsfigur,* so ist

$\frac{\partial f'}{\partial \nu'} = 0$, $[f'] = 0$, und wir erhalten

$$(44)\quad \psi\zeta + \int\limits_S f' \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' = s - \alpha \int\limits_{T_1} \chi' \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1' - \lambda \mathfrak{r}^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa} \zeta^2 (a^2 + b^2) - 2\lambda\zeta(ax + by) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots).$$

Ist auch noch $\chi \equiv 0$, so finden wir noch einfacher

$$(45)\quad \psi\zeta + \int\limits_S f' \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' = s - \lambda \mathfrak{r}^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa} \zeta^2 (a^2 + b^2) - 2\zeta\lambda(ax + by) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots).$$

Augenscheinlich handelt es sich diesmal um die Bestimmung einer zu dem Werte ω_1 der Winkelgeschwindigkeit gehörigen homogenen Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft einer gegebenen, ebenfalls homogenen Gleichgewichtsfigur von gleicher Dichte. Wie man sich leicht überzeugt, ist die Grundgleichung (45) bis auf einige Änderungen der Bezeichnung mit der in dem dritten Kapitel aufgestellten Integro-Differentialgleichung (75) III identisch. Sie ist vorhin auf einem etwas anderen Wege abgeleitet worden und gilt allgemeiner, auch wenn die Niveauflächen des Gesamtpotentials, die a. a. O. gar nicht herangezogen wurden, möglicherweise die besonderen, im vorstehenden angeführten Voraussetzungen nicht erfüllen. Die Beziehungen (44) und (45) gelten für alle τ in $T + S$. Rechter Hand bezeichnet s eine (stetige) Funktion von $\mathfrak{r}$. Handelt es sich um eine homogene Flüssigkeit, so genügt es, sich auf die Betrachtung der Punkte auf S zu beschränken und ζ als eine Ortsfunktion auf S aufzufassen.

Wir kehren jetzt zu der allgemeinen Gleichung (43) zurück und setzen diesmal speziell voraus, die Dichte nehme von außen nach innen *monoton* zu oder zum mindesten nicht ab, so daß auch Konstanzgebiete vorkommen können. Es sei f_m der kleinste, f_M der größte Wert der Dichte. Es gilt $f_m \leqq f \leqq f_M$, und es kann f in dem Intervalle $\langle 0, \mathfrak{l} \rangle$ auch eine endliche Anzahl Sprungstellen haben. Für (43) kann man im vorliegenden Falle, wie man leicht sieht, schreiben:

$$(46)\quad \psi\zeta + \int\limits_0^{f_M} df' \int\limits_{S_{\mathfrak{r}'}} \zeta' \frac{1}{\varrho} d\sigma' = s - \alpha \int\limits_{T_1} \chi' \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1' - \lambda \mathfrak{r}^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa} \zeta^2 (a^2 + b^2) - 2\lambda\zeta(ax + by) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots).$$

Das Integral linker Hand ist ein Integral im Sinne von Stieltjes. Die Sprungstellen der Dichte, zu denen auch die freie Oberfläche der Ausgangsfigur S gehört, außerhalb von $T + S$ ist ja die Dichte f gleich Null, liefern, wie leicht ersichtlich, die über S und $\mathfrak{S}$ erstreckten Integralausdrücke in (43) links. Es ist nicht schwer, zu zeigen, indem man die bekannten

Eigenschaften der Stieltjesschen Integrale heranzieht, daß die Formel (46) gilt, auch wenn f, als Funktion von $\mathfrak{r}$ aufgefaßt, in den Stetigkeitsintervallen eine Ableitung gar nicht besitzt, ja sogar eine beliebige in dem Intervalle $\langle 0, \mathfrak{l}\rangle$ erklärte, nicht wachsende Funktion von $\mathfrak{r}$ darstellt[87].

Aber auch, wenn man bezüglich f die eingangs eingeführten Voraussetzungen macht, so daß f nicht notwendig mehr von außen nach innen hin zunimmt (nicht abnimmt), kann man, wenn man f als Funktion von $\mathfrak{r}$ auffaßt, $f = f(\mathfrak{r})$, (43) in der Form

$$(47)\quad \psi\zeta - \int_0^\infty df(\mathfrak{r}')\int_{S_{\mathfrak{r}'}} \zeta' \frac{1}{\varrho}\,d\sigma' = s - \alpha\int_{T_1} \chi' \frac{1}{\varrho_1}\,d\tau_1' - \lambda\,\mathbf{r}^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2) - 2\lambda\zeta(ax+by) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \dots)$$

schreiben[88].

Wir haben vorhin angenommen, daß die Flüssigkeitskörper T und T_1 wie starre Körper um die z-Achse rotieren. Ist demgegenüber die Winkelgeschwindigkeit wie bei den analogen Betrachtungen des dritten Kapitels eine (bekannte) Funktion des Abstandes von der Rotationsachse, $\omega(\mathbf{r}^2)$ und $\omega_1(\mathbf{r}^2)$ $(\mathbf{r}^2 = x^2 + y^2)$, so gelangt man, wie man sich an Hand der Entwicklungen auf S. 48 leicht überzeugt, zu der Integro-Differentialgleichung

$$(48)\quad \psi\zeta + \int_S f'\frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' - \int_{\mathfrak{S}} [f']\frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' - \int_T \zeta' \frac{\partial f'}{\partial \nu'}\frac{1}{\varrho}d\tau'$$

$$= s - \alpha\int_{T_1}\chi'\frac{1}{\varrho_1}d\tau_1' - \frac{\omega^2(\mathbf{r}^2)}{2\varkappa}(a^2+b^2)\zeta^2 - \frac{1}{\varkappa}\int_{\mathbf{r}}^{\mathfrak{r}_1}[\omega^2(\mathbf{r}'^2) - \omega^2(\mathbf{r}^2)]\,\mathbf{r}'d\mathbf{r}'$$

$$- \frac{1}{\varkappa}\int_0^{\mathfrak{r}_1}[\omega_1^2(\mathbf{r}'^2) - \omega^2(\mathbf{r}'^2)]\,\mathbf{r}'d\mathbf{r}' - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \dots).$$

Natürlich hat diesmal die Ausgangskonfiguration Axialsymmetrie um die z-Achse.

Zum Schluß dieser Nummer einige grundlegende Ungleichheiten, die bei dem Konvergenzbeweis zur Verwendung kommen.

Es sei wie vorhin ζ eine in $T + S$ erklärte stetige, im Koordinatenursprung O verschwindende Ortsfunktion, die in den in bezug auf die Symmetrieebenen des Systems symmetrisch gelegenen Punkten die gleichen Werte annimmt, beschränkte und, außer höchstens in O, stetige

[87] Es genügt, um dies zu zeigen, die bei der Ableitung von (36) auszuführende teilweise Integration aufmerksam zu verfolgen.

[88] Das Intervall $\langle 0, \infty)$ könnte man übrigens durch $\langle 0, \mathfrak{l}_*\rangle$ $(\mathfrak{l}_* > \mathfrak{l}$ beliebig) ersetzen. Das Intervall $\langle 0, \mathfrak{l}_*\rangle$ zerfällt diesmal, woran wir noch einmal erinnern, in eine endliche Anzahl Teile, so daß in jedem dieser Teilintervalle f und $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{r}}$ sich stetig verhalten. (Vgl. die Fußnote [95].)

partielle Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \frac{\partial \zeta}{\partial z}$ hat und die Beziehungen

$$(49) \qquad \left|\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right| \leqq \Omega, \quad \text{somit auch} \quad |\zeta| \leqq \sqrt{3}\,\Omega\, r$$

erfüllt.

Wir bezeichnen die Werte, welche die Funktionen $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}, \mathfrak{W}^{(n)}$ im Koordinatenursprunge annehmen, mit ${}_0\mathfrak{W}_1, {}_0\mathfrak{W}, {}_0\mathfrak{W}^{(n)}$ und setzen

$$(50) \qquad \begin{aligned} \Psi &= (\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W} - \mathfrak{W}^{(1)}) - ({}_0\mathfrak{W}_1 - {}_0\mathfrak{W} - {}_0\mathfrak{W}^{(1)}) \\ &= \mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots - {}_0\mathfrak{W}^{(2)} - {}_0\mathfrak{W}^{(3)} - \ldots \end{aligned}$$

Augenscheinlich ist Ψ im Punkte O gleich Null. Wie sich zeigen läßt, genügt Ψ Ungleichheiten von der Form

$$(51) \qquad \left|\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right| \leqq \alpha_3\, r\, \Omega^2, \quad |\Psi| \leqq \sqrt{3}\,\alpha_3\, r^2 \Omega^2.$$

Übrigens kann, was für das folgende wesentlich ist, ζ auch *komplexe* Werte annehmen (vgl. loc. cit. [75] S. 500—504).

Wir nehmen von nun an $\Omega \leqq \frac{\varepsilon}{4}$ an und bezeichnen mit $\dot{\zeta}$ eine beliebige andere wie ζ beschaffene Ortsfunktion in $T + S$. Auch $\dot{\zeta}$ nimmt demnach in zwei in bezug auf die $k+1$ Symmetrieebenen symmetrisch gelegenen Punkten dieselben Werte an, verschwindet in O und erfüllt die Beziehungen

$$(52) \qquad \left|\frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq \Omega, \quad |\dot{\zeta}| \leqq \sqrt{3}\,\Omega\, r.$$

Es sei ferner

$$(53) \qquad \begin{gathered} \left|\frac{\partial}{\partial x}(\zeta - \dot{\zeta})\right|, \left|\frac{\partial}{\partial y}(\zeta - \dot{\zeta})\right|, \left|\frac{\partial}{\partial z}(\zeta - \dot{\zeta})\right| \leqq \mho, \\ |\zeta - \dot{\zeta}| \leqq \sqrt{3}\,\mho\, r, \quad \mho \leqq \tfrac{1}{2}\Omega. \end{gathered}$$

Bezeichnet man den zu Ψ analogen, auf $\dot{\zeta}$ bezüglichen Ausdruck mit $\dot{\Psi}$

$$(54) \qquad \dot{\Psi} = (\dot{\mathfrak{W}}_1 - \mathfrak{W} - \dot{\mathfrak{W}}^{(1)}) - ({}_0\dot{\mathfrak{W}}_1 - {}_0\mathfrak{W} - {}_0\dot{\mathfrak{W}}^{(1)}),$$

so gelten, wie man des weiteren zeigen kann (vgl. loc. cit. [75] S. 504—505), die Ungleichheiten

$$(55) \qquad \begin{gathered} \left|\frac{\partial}{\partial x}(\Psi - \dot{\Psi})\right|, \left|\frac{\partial}{\partial y}(\Psi - \dot{\Psi})\right|, \left|\frac{\partial}{\partial z}(\Psi - \dot{\Psi})\right| \leqq \alpha_4\, r\, \Omega\, \mho, \\ |\Psi - \dot{\Psi}| \leqq \sqrt{3}\,\alpha_4\, r^2 \Omega\, \mho. \end{gathered}$$

Noch einige Ungleichheitsbeziehungen verwandten Charakters. Es gilt (vgl. loc. cit. [75] S. 505—506)

$$(56) \qquad |\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots| = |\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W} - \mathfrak{W}^{(1)}| \leqq \alpha_5\, \Omega^2$$

sowie

$$(57) \qquad |(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots) - (\dot{\mathfrak{W}}^{(2)} + \dot{\mathfrak{W}}^{(3)} + \ldots)| \leqq \alpha_6\, \Omega\, \mho.$$

Es sei schließlich

$$(58)\qquad \mathfrak{W}_1 = \int\limits_{T_1} \chi' \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1' \quad \text{und} \quad \dot{\mathfrak{W}}_1 = \int\limits_{\dot{T}_1} \chi' \frac{1}{\dot{\varrho}_1} d\dot{\tau}_1'$$

$$(\dot{\varrho}_1^2 = (\dot{x}_1' - \dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_1' - \dot{y}_1)^2 + (\dot{z}_1' - \dot{z}_1)^2).$$

Wie man leicht feststellt, ist das Newtonsche Potential $\mathfrak{W}_1$, als Funktion von x, y, z aufgefaßt, in $T + S$ nebst seinen partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig. Ferner gilt in $T + S$

$$(59)\qquad |\mathfrak{W}_1| \leqq \alpha_7, \quad \left|\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{W}_1\right|, \quad \left|\frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{W}_1\right|, \quad \left|\frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{W}_1\right| \leqq \alpha_8 r,$$

somit

$$\left|\int\limits_{T_1} \chi' \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{{}_0\varrho_1}\right) d\tau_1'\right| \leqq \sqrt{3}\,\alpha_8 r^2 \qquad ({}_0\varrho_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2).$$

Des weiteren ist

$$(60)\qquad \left|\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{W}_1 - \dot{\mathfrak{W}}_1)\right|, \ldots \leqq \alpha_9 r \mho, \quad |\mathfrak{W}_1 - \dot{\mathfrak{W}}_1| \leqq \alpha_{10} \mho.$$

17. Nichthomogene Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft von homogenen. Der Übersichtlichkeit halber wollen wir der Untersuchung der allgemeinen Integro-Differentialgleichung (43) eine Behandlung des wichtigen Spezialfalles einer homogenen Gleichgewichtsfigur als Ausgangsfigur vorausschicken und nehmen demgemäß f konstant, mithin $\frac{\partial f}{\partial \nu} \equiv 0$ an[89]. Die Gleichung (43) erhält jetzt, wenn wir der Deutlichkeit halber $\psi(\tau)$, $\zeta(\tau)$ statt ψ, ζ schreiben, die Gestalt (vgl. die Formel (44))

$$(61)\qquad \psi(\tau)\,\zeta(\tau) + \int\limits_S f' \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' = s(\mathfrak{r}) - \alpha \int\limits_{T_1} \chi' \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1' - \lambda \mathfrak{r}^2$$
$$- \frac{\omega_1^2}{2\varkappa} \zeta^2 (a^2 + b^2) - 2\lambda\zeta(ax + by) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots).$$

Sie gilt für alle τ in $T + S$. Rechter Hand ist $s(\mathfrak{r})$ eine zunächst noch beliebige stetige Funktion von $\mathfrak{r}$. Im Einklang mit den auf S. 104 eingeführten Bezeichnungen mögen von nun an wie schon oben ${}_0\varrho_1$ den Abstand des Punktes P_1 in $T_1 + S_1$ vom Koordinatenursprung, ${}_0s$, ${}_0\psi$, ${}_0\zeta$, ${}_0\varrho$ die Werte von s, ψ, ζ, ϱ in O bedeuten. Für $\tau \to 0$ folgt aus (61), da ${}_0\psi = {}_0\zeta = 0$ ist,

$$(62)\qquad \int\limits_S f' \frac{1}{{}_0\varrho} \zeta' d\sigma' = {}_0s - \alpha \int\limits_{T_1} \chi' \frac{1}{{}_0\varrho_1} d\tau_1' - \frac{1}{\varkappa}({}_0\mathfrak{W}^{(2)} + {}_0\mathfrak{W}^{(3)} + \ldots),$$

[89] Mit schwach inhomogenen Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Maclaurinschen und Jacobischen Ellipsoide hat sich Liapounoff in den beiden in der Fußnote [40] genannten großen Abhandlungen beschäftigt. Die Methode von Liapounoff ist von der im folgenden gebrauchten ganz verschieden und mit derjenigen verwandt, der er sich bei Behandlung homogener Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Flüssigkeitsellipsoide bediente (vgl. 6.).

darum

$$(63)\quad \psi(\tau)\,\zeta(\tau)+\int\limits_S f'\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{{}_0\varrho}\right)\zeta'\,d\sigma'=s(\mathfrak{x})-{}_0s-\alpha\int\limits_{T_1}\chi'\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{{}_0\varrho_1}\right)d\tau_1'$$
$$-\lambda\mathfrak{x}^2-\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2)-2\lambda\,\zeta(ax+by)$$
$$-\frac{1}{\varkappa}\left(\mathfrak{W}^{(2)}+\mathfrak{W}^{(3)}+\dots-{}_0\mathfrak{W}^{(2)}-{}_0\mathfrak{W}^{(3)}-\dots\right).$$

Läßt man τ gegen σ auf S konvergieren, so gibt (61)

$$(64)\quad \psi(\sigma)\,\zeta(\sigma)+\int\limits_S f'\frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma'=s(\mathfrak{l})-\alpha\int\limits_{T_1}\chi'\frac{1}{\varrho_1}d\tau_1'-\lambda R^2$$
$$-\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2)-2\lambda\zeta(aX+bY)-\frac{1}{\varkappa}\left(\mathfrak{W}^{(2)}+\mathfrak{W}^{(3)}+\dots\right),\quad (R^2=X^2+Y^2).$$

Es ist zu beachten, daß hier linker und rechter Hand überall der Aufpunkt der Punkt $\sigma=(X,Y,Z)$ auf S ist.

Wir hatten bereits in 8. die Gelegenheit, uns mit der homogenen Integralgleichung

$$(65)\quad \psi(\sigma)\,\zeta(\sigma)+\int\limits_S f'\frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma'=0$$

zu beschäftigen und festgestellt, daß sie stets eine triviale Nullösung

$$(66)\quad u_1=c\left(-\int\limits_S f\psi c^2\,d\sigma\right)^{-\frac{1}{2}},\quad \int\limits_S f\psi u_1^2\,d\sigma=-1$$

hat. Ist T kein Rotationskörper um die z-Achse, so hat (65) eine weitere triviale Nullösung

$$(67)\quad u_2=\gamma\left(-\int\limits_S f\psi\gamma^2\,d\sigma\right)^{-\frac{1}{2}},\quad \gamma=Xb-Ya,\quad \int\limits_S f\psi u_2^2\,d\sigma=-1.$$

Augenscheinlich ist u_1 in bezug auf die durch die z-Achse hindurchgehenden Symmetrieebenen symmetrisch und geht in $-u_1$ bei der Spiegelung an der Ebene $z=0$ über. Des weiteren ist u_2 in bezug auf die Ebene $z=0$ symmetrisch und ändert bei der Spiegelung an den übrigen Symmetrieebenen sein Vorzeichen. Ist T ein Rotationskörper, so wird im folgenden wie früher $u_2\equiv 0$ gesetzt.

Der Einfachheit halber nehmen wir zunächst einmal an, daß (65) keine weiteren Nullösungen hat (der reguläre Fall), und setzen

$$(68)\quad \frac{1}{\varrho}=\psi\psi'(u_1u_1'+u_2u_2')+N(\sigma,\sigma').$$

Nach bekannten Sätzen hat die Integralgleichung

$$(69)\quad \psi(\sigma)\,\zeta(\sigma)+\int\limits_S f'N\zeta'\,d\sigma'=0$$

keine Nullösungen mehr. Führt man die Beziehung (68) in (64) ein und

beachtet, daß aus Gründen der Symmetrie

$$(70)\qquad \int_S f'\psi' u_1' \zeta' d\sigma' = 0, \quad \int_S f'\psi' u_2' \zeta' d\sigma' = 0$$

ist, so erhält man

$$(71)\qquad \psi(\sigma)\,\zeta(\sigma) + \int_S f' N(\sigma,\sigma')\,\zeta' d\sigma' = s(\mathfrak{l}) - \alpha \int_{T_1} \chi' \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1'$$
$$-\lambda R^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2) - 2\lambda\zeta(aX+bY) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots).$$

Es sei

$$s(\mathfrak{r}) = {}_0s + h\,\mathfrak{r}^2\,\bar{s}(\mathfrak{r})$$

gesetzt, unter $\bar{s}(\mathfrak{r})$ eine vorgegebene, nebst ihrer Ableitung stetige Funktion von $\mathfrak{r}$ mit $\bar{s}(\mathfrak{l}) \neq 0$, unter ${}_0s$ einen zunächst noch nicht bekannten Wert, unter h einen zu bestimmenden Koeffizienten verstanden. Die Gleichung (63) nimmt damit die Form

$$(72)\qquad \psi(\tau)\,\zeta(\tau) = -\int_S f'\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right)\zeta' d\sigma' + h\,\mathfrak{r}^2\,\bar{s}(\mathfrak{r}) - \alpha\int_{T_1}\chi'\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{{}_0\varrho_1}\right)d\tau_1' - \lambda\mathfrak{r}^2$$
$$-\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2) - 2\lambda\zeta(ax+by) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots - {}_0\mathfrak{W}^{(2)} - {}_0\mathfrak{W}^{(3)} - \ldots)$$

an.

Das System (71) und (72) wird durch sukzessive Approximationen gelöst. Mit Rücksicht auf den zur Verfügung stehenden Raum müssen wir uns im folgenden mit der Wiedergabe der Hauptgedanken begnügen und verweisen wegen der Einzelheiten auf die in der Fußnote [75] genannte Abhandlung, S. 509—525. Wir beginnen mit der ersten Näherung $\overset{1}{\zeta}(\tau)$. Die Werte $\overset{1}{\zeta}(\sigma)$ auf S bestimmen sich aus der Gleichung

$$(73)\qquad \psi(\sigma)\,\overset{1}{\zeta}(\sigma) + \int_S f' N(\sigma,\sigma')\,\overset{1}{\zeta}(\sigma')\,d\sigma' = s(\mathfrak{l}) - \alpha\int_T \chi' \frac{1}{\varrho(\sigma,\tau')} d\tau' - \lambda R^2$$

zu

$$(74)\qquad \overset{1}{\zeta}(\sigma) = \frac{s(\mathfrak{l})}{\psi(\sigma)} - \lambda\frac{R^2}{\psi(\sigma)} - \frac{\alpha}{\psi(\sigma)}\int_T \chi' \frac{1}{\varrho(\sigma,\tau')} d\tau'$$
$$-\int_S H(\sigma,\sigma')\left[\frac{s(\mathfrak{l})}{\psi(\sigma')} - \frac{\alpha}{\psi(\sigma')}\int_T \chi'' \frac{1}{\varrho(\sigma',\tau'')} d\tau'' - \lambda\frac{R'^2}{\psi(\sigma')}\right] d\sigma',$$

unter $H(\sigma,\sigma')$ den zu $\frac{1}{\psi} f' N(\sigma,\sigma')$ gehörenden lösenden Kern verstanden. Wie in **9.** und **10.** läßt sich zeigen, daß $\overset{1}{\zeta}(\sigma)$ auf S in bezug auf die Symmetrieebenen von T symmetrisch ist und stetige Ableitungen erster Ordnung hat.

Wir setzen weiter

$$(75)\qquad {}_0\overset{1}{s} = \int_S f' \frac{1}{{}_0\varrho}\overset{1}{\zeta}' d\sigma' + \alpha\int_T \chi' \frac{1}{{}_0\varrho} d\tau', \quad \overset{1}{h} = \frac{s(\mathfrak{l}) - {}_0\overset{1}{s}}{\mathfrak{l}^2\,\bar{s}(\mathfrak{l})}$$

und bestimmen $\overset{1}{\zeta}(\tau)$ in T durch

$$(76)\quad \psi(\tau)\,\overset{1}{\zeta}(\tau) = -\int\limits_S f'\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right)\overset{1}{\zeta}{}'d\sigma' + \overset{1}{h}\,\mathfrak{r}^2\,\mathfrak{z}(\mathfrak{x}) - \alpha\int\limits_T \chi'\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right)d\tau' - \lambda\,\mathfrak{r}^2.$$

Augenscheinlich ist $\overset{1}{\zeta}(\tau)$ in T in bezug auf die Symmetrieebenen von T symmetrisch. Die rechte Seite der Gleichung (76) stellt eine nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Ortsfunktion in $T+S$ dar. Man überzeugt sich ohne Mühe, daß diese partiellen Ableitungen in O wie r verschwinden, demnach die betrachtete Funktion selbst, die ja in O verschwindet, sich in der Umgebung dieses Punktes wie r^2 verhält. Nach Voraussetzung verschwindet $\psi(\tau)$ in O wie $\mathfrak{r}$ oder, was dasselbe ist, wie r;[90] darum hat $\overset{1}{\zeta}(\tau)$ in T beschränkte, höchstens mit Ausnahme des Koordinatenursprungs stetige Ableitungen erster Ordnung und verschwindet für $r \to 0$. Man überzeugt sich jetzt leicht an Hand der Beziehung (75), daß auf S die beiden Formeln (73) und (76) zu den gleichen Werten $\overset{1}{\zeta}(\sigma)$ führen, darum $\overset{1}{\zeta}(\tau)$ in $T+S$ beschränkte und, außer höchstens in O, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat.

$\overset{1}{T}$ sei das durch die Transformation $(x, y, z) \to (x + a\overset{1}{\zeta}, y + b\overset{1}{\zeta}, z + c\overset{1}{\zeta})$ vermittelte Bild von T. Mit $\overset{1}{\varrho}, {}_0\overset{1}{\varrho}, \overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(2)}, \overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(3)}, \ldots, {}_0\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(2)}, {}_0\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(3)}, \ldots$ bezeichnen wir das, was man erhält, wenn man in $\varrho_1, {}_0\varrho_1, \mathfrak{W}^{(2)}, \mathfrak{W}^{(3)}, \ldots, {}_0\mathfrak{W}^{(2)}, {}_0\mathfrak{W}^{(3)}, \ldots$ ζ durch $\overset{1}{\zeta}$ ersetzt, und bestimmen die zweite Annäherung $\overset{2}{\zeta}(\sigma)$ auf S aus der Gleichung

$$(77)\quad \psi(\sigma)\overset{2}{\zeta}(\sigma) + \int\limits_S f'N(\sigma,\sigma')\overset{2}{\zeta}{}'d\sigma' = s(\mathfrak{l}) - \alpha\int\limits_{\overset{1}{T}} \chi'\frac{1}{\overset{1}{\varrho}}d\overset{1}{\tau}{}' - \lambda R^2$$
$$- \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}(\overset{1}{\zeta})^2(a^2+b^2) - 2\lambda\overset{1}{\zeta}(aX + bY) - \frac{1}{\varkappa}(\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(2)} + \overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(3)} + \ldots)$$
$$= s(\mathfrak{l}) - \alpha\int\limits_{\overset{1}{T}} \chi'\frac{1}{\overset{1}{\varrho}}d\overset{1}{\tau}{}' - \lambda R^2 + \Pi\{\lambda, \overset{1}{\zeta}\}$$

zu

$$(78)\quad \overset{2}{\zeta}(\sigma) = \frac{1}{\psi(\sigma)}s(\mathfrak{l}) - \frac{\alpha}{\psi(\sigma)}\int\limits_{\overset{1}{T}} \chi'\frac{1}{\overset{1}{\varrho}}d\overset{1}{\tau}{}' - \frac{\lambda}{\psi(\sigma)}R^2 + \frac{1}{\psi(\sigma)}\Pi\{\lambda, \overset{1}{\zeta}\}$$
$$-\int\limits_S H(\sigma,\sigma')\frac{1}{\psi(\sigma')}\left[s(\mathfrak{l}) - \alpha\int\limits_{\overset{1}{T}} \chi''\frac{1}{\overset{1}{\varrho}(\sigma',\overset{1}{\tau}{}'')}d\overset{1}{\tau}{}'' - \lambda R'^2 + \Pi'\{\lambda, \overset{1}{\zeta}{}'\}\right]d\sigma'.$$

---

[90] Präziser: $\left|\dfrac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|$ hat in der Umgebung des Koordinatenursprunges eine von Null verschiedene untere Grenze.

Wir setzen nunmehr

$$(79)\qquad \begin{aligned} {}_0\overset{2}{s} &= \int_S f' \frac{1}{{}_0\varrho} \overset{2}{\zeta}{}' d\sigma' + \alpha \int_{\overset{1}{T}} \chi' \frac{1}{{}_0\overset{1}{\varrho}} d\overset{1}{\tau}{}' + \frac{1}{\varkappa} ({}_0\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(2)} + {}_0\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(3)} + \dots), \\ \overset{2}{h} &= \frac{s(\mathfrak{l}) - {}_0\overset{2}{s}}{\mathfrak{l}^2 \mathfrak{s}(\mathfrak{l})} \end{aligned}$$

und bestimmen $\overset{2}{\zeta}(\tau)$ in T aus

$$(80)\quad \psi(\tau)\overset{2}{\zeta}(\tau) = -\int_S f'\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right)\overset{2}{\zeta}{}' d\sigma' + \overset{2}{h}\mathfrak{r}^2\mathfrak{s}(\mathfrak{r}) - \alpha \int_{\overset{1}{T}} \chi' \left(\frac{1}{\overset{1}{\varrho}} - \frac{1}{{}_0\overset{1}{\varrho}}\right) d\overset{1}{\tau}{}' - \lambda \mathfrak{r}^2$$

$$- \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}(\overset{1}{\zeta})^2(a^2+b^2) - 2\lambda\overset{1}{\zeta}(ax+by) - \frac{1}{\varkappa}(\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(2)} + \overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(3)} + \dots - {}_0\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(2)} - {}_0\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(3)} - \dots)$$

$$= -\int_S f'\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right)\overset{2}{\zeta}{}' d\sigma' + \overset{2}{h}\mathfrak{r}^2\mathfrak{s}(\mathfrak{r}) - \alpha \int_{\overset{1}{T}} \chi' \left(\frac{1}{\overset{1}{\varrho}} - \frac{1}{{}_0\overset{1}{\varrho}}\right) d\overset{1}{\tau}{}'$$

$$- \lambda\mathfrak{r}^2 + \Pi\{\lambda, \overset{1}{\zeta}\} - {}_0\Pi\{\lambda, \overset{1}{\zeta}\}.$$ [91]

Wie man sich ohne große Mühe überzeugt (vgl. loc. cit. [75] S. 511—513), ist $\overset{2}{\zeta}(\tau)$ in $T+S$ in bezug auf die Symmetrieebenen von T symmetrisch, verschwindet in O und hat beschränkte und, außer höchstens in O, stetige Ableitungen erster Ordnung.

Man geht so weiter und findet für die n-te Näherung $\overset{n}{\zeta}(\tau)$ $(n \geqq 2)$ die Formeln

$$(81)\quad \psi(\sigma)\overset{n}{\zeta}(\sigma) + \int_S f' N(\sigma,\sigma')\overset{n}{\zeta}{}' d\sigma' = s(\mathfrak{l}) - \alpha \int_{\overset{n-1}{T}} \chi' \frac{1}{\overset{n-1}{\varrho}} d\overset{n-1}{\tau}{}' - \lambda R^2 + \Pi\{\lambda, \overset{n-1}{\zeta}\},$$

$$(82)\quad \overset{n}{\zeta}(\sigma) = \frac{1}{\psi(\sigma)}\left[s(\mathfrak{l}) - \alpha \int_{\overset{n-1}{T}} \chi' \frac{1}{\overset{n-1}{\varrho}} d\overset{n-1}{\tau}{}' - \lambda R^2 + \Pi\{\lambda, \overset{n-1}{\zeta}\}\right]$$

$$- \int_S H(\sigma,\sigma')\frac{1}{\psi(\sigma')}\left[s(\mathfrak{l}) - \alpha \int_{\overset{n-1}{T}} \chi'' \frac{1}{\overset{n-1}{\varrho}(\sigma', \overset{n-1}{\tau}{}'')} d\overset{n-1}{\tau}{}'' - \lambda R'^2 + \Pi'\{\lambda, \overset{n-1}{\zeta}{}'\}\right] d\sigma',$$

$$(83)\qquad \begin{aligned} {}_0\overset{n}{s} &= \int_S f' \frac{1}{{}_0\varrho} \overset{n}{\zeta}{}' d\sigma' + \alpha \int_{\overset{n-1}{T}} \chi' \frac{1}{{}_0\overset{n-1}{\varrho}} d\overset{n-1}{\tau}{}' + \frac{1}{\varkappa} ({}_0\overset{n-1}{\mathfrak{W}}{}^{(2)} + {}_0\overset{n-1}{\mathfrak{W}}{}^{(3)} + \dots), \\ \overset{n}{h} &= \frac{s(\mathfrak{l}) - {}_0\overset{n}{s}}{\mathfrak{l}^2 \mathfrak{s}(\mathfrak{l})}, \end{aligned}$$

$$(84)\quad \psi(\tau)\overset{n}{\zeta}(\tau) = -\int_S f'\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right)\overset{n}{\zeta}{}' d\sigma' + \overset{n}{h}\mathfrak{r}^2\mathfrak{s}(\mathfrak{r}) - \alpha \int_{\overset{n-1}{T}} \chi' \left(\frac{1}{\overset{n-1}{\varrho}} - \frac{1}{{}_0\overset{n-1}{\varrho}}\right) d\overset{n-1}{\tau}{}'$$

$$- \lambda\mathfrak{r}^2 + \Pi\{\lambda, \overset{n-1}{\zeta}\} - {}_0\Pi\{\lambda, \overset{n-1}{\zeta}\}.$$

---

[91] Wir bezeichnen zur Abkürzung mit ${}_0\Pi\{\lambda, \overset{1}{\zeta}\}$ den Wert von $\Pi\{\lambda, \overset{1}{\zeta}\}$ im Koordinatenursprunge.

Der Iterationsprozeß kann, wenn man $|\alpha|$, $|\lambda|$ und $|s(\mathfrak{l})|$ hinreichend klein annimmt, beliebig fortgesetzt werden. Die Näherungsfunktionen $\overset{n}{\zeta}(\tau)$ konvergieren gleichmäßig gegen eine in $T+S$ stetige, in O verschwindende Funktion $\zeta(\tau)$, die in $T+S$ beschränkte und, höchstens mit Ausnahme des Koordinatenursprunges, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat und die Integro-Differentialgleichung (61) befriedigt. Die so gewonnene Lösung ist die einzige ihrer Art. Der Beweis aller dieser Behauptungen läßt sich durch eine sinngemäße Modifikation der in **9.** durchgeführten Überlegungen erbringen (vgl. loc. cit. [75] S. 514 bis 520) [92]. Eine wesentliche Rolle spielen hierbei die am Schluß von **16.** angegebenen Ungleichheiten.

Wir nehmen jetzt speziell $k=2$ an, denken uns das Achsenkreuz so orientiert, daß jedenfalls alle drei Koordinatenebenen zu Symmetrieebenen von T werden, und setzen voraus, daß Nullösungen der Gleichung (65) existieren, die von u_1 und u_2 linear unabhängig sind (*der Verzweigungsfall*). Es ist in **8.** gezeigt worden, daß es gewiß Systeme linear unabhängiger Lösungen, wir bezeichnen irgendeins mit $u_1, u_2, \ldots, u_m$, gibt, die wie folgt beschaffen sind. Sie enthalten die beiden vorhin betrachteten trivialen Nullösungen u_1 und u_2, erfüllen die Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen

$$(85)\qquad \int_S f\psi u_k u_l d\sigma = 0 \quad (k \neq l), \qquad \int_S f\psi u_k^2 d\sigma = -1$$

und ändern sich beim Übergang von σ zu den in bezug auf die Symmetrieebenen von T symmetrisch gelegenen Punkten nicht oder aber wechseln das Vorzeichen. Der Einfachheit halber nehmen wir im folgenden zunächst an, es gebe nur eine von u_1 und u_2 verschiedene Nullösung u_3, und es möge, unter $\overset{*}{\sigma}$ einen zu σ in bezug auf irgendeine der Symmetrieebenen spiegelbildlich gelegenen Punkt verstanden, allemal

$$(86)\qquad u_3(\sigma) = u_3(\overset{*}{\sigma})$$

sein. Nach bekannten Sätzen hat die Integralgleichung

$$(87)\qquad \psi(\sigma)\,\zeta(\sigma) + \int_S f'\,\mathfrak{N}\,\zeta' d\sigma' = 0$$

[92] Es sei daran erinnert, daß wir vorhin der gesuchten Gleichgewichtsfigur von vornherein bestimmte Symmetrieeigenschaften auferlegt hatten. Diese Voraussetzung kann man, wie E. Hölder in der in der Fußbemerkung [75] genannten Note zeigte, fallen lassen. Demgemäß braucht auch nicht mehr vorausgesetzt zu werden, daß das Bild des Punktes O mit O koinzidiert. Auch in einer anderen Richtung geht E. Hölder über die Ergebnisse, über die im vorstehenden referiert worden ist, hinaus. Er normiert die Lösungen im Anschluß an Liapounoff so, daß man die Gewißheit hat, nicht mehrmals die gleiche Konfiguration zu erhalten. Es wird das Volumen von $T_{\mathfrak{l}1}$ allemal demjenigen von $T_{\mathfrak{l}}$ gleich gesetzt.

mit

$$\mathfrak{N}(\sigma, \sigma') = \frac{1}{\varrho} - \psi\,\psi'(u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3') \tag{88}$$

keine Nullösungen mehr. Wir schreiben die Beziehung (64) in der Form

$$\psi(\sigma)\,\zeta(\sigma) + \int\limits_S f'\,\mathfrak{N}(\sigma,\sigma')\,\zeta' d\sigma' = \psi\,u_3\,r_3 + s(\mathfrak{l}) - \alpha \int\limits_{T_1} \chi' \frac{1}{\varrho_1}\,d\tau_1' \tag{89}$$
$$- \lambda R^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\,\zeta^2 (a^2 + b^2) - 2\,\lambda\,\zeta\,(aX + bY) - \frac{1}{\varkappa}\,(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots),$$

$$r_3 = - \int\limits_S f'\,\psi' u_3' \zeta' d\sigma', \tag{90}$$

und setzen wie auf S. 107 unter h einen noch zu bestimmenden, absolut hinreichend kleinen Wert verstanden,

$$s(\mathfrak{r}) = {}_0 s + h\,\mathfrak{r}^2 \mathfrak{s}(\mathfrak{r}),$$
$${}_0 s = \int\limits_S f' \frac{1}{{}_0\varrho}\,\zeta' d\sigma' + \alpha \int\limits_{T_1} \chi' \frac{1}{{}_0\varrho_1}\,d\tau_1' + \frac{1}{\varkappa}\,({}_0\mathfrak{W}^{(2)} + {}_0\mathfrak{W}^{(3)} + \ldots), \tag{91}$$

$$\psi(\tau)\,\zeta(\tau) = - \int\limits_S f' \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) \zeta' d\sigma' + h\,\mathfrak{r}^2 \mathfrak{s}(\mathfrak{r}) - \alpha \int\limits_{T_1} \chi' \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{{}_0\varrho_1}\right) d\tau_1' \tag{92}$$
$$- \lambda\,\mathfrak{r}^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\,\zeta^2 (a^2 + b^2) - 2\,\lambda\,\zeta\,(ax + by)$$
$$- \frac{1}{\varkappa}\,(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots - {}_0\mathfrak{W}^{(2)} - {}_0\mathfrak{W}^{(3)} - \ldots).$$

Durch Überlegungen, die den auf S. 107 ff. angedeuteten parallel verlaufen, kann man beweisen, daß die Integro-Differentialgleichungen (89) und (92) für alle hinreichend kleinen Werte von $|s(\mathfrak{l})|$, $|\alpha|$, $|\lambda|$ und $|r_3|$ eine und nur eine in $T + S$ stetige, in O verschwindende Lösung $\zeta(\tau)$ besitzen, die daselbst beschränkte und, höchstens mit Ausnahme des Ursprunges, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat. Die Lösung ist in bezug auf die Symmetrieebenen von T symmetrisch und erfüllt beiläufig die Ungleichheitsbeziehungen

$$\left|\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{4}, \qquad |\zeta| \leqq \sqrt{3}\,r\,\frac{\varepsilon}{4}. \tag{93}$$

Es gilt ferner die in einem Bereiche

$$|s(\mathfrak{l})|, |\alpha|, |\lambda|, |r_3| \leqq d_0 \tag{94}$$

konvergierende Entwicklung

$$\zeta(\tau) = \sum a_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}\,\lambda^{\nu_1} s^{\nu_2}(\mathfrak{l})\,\alpha^{\nu_3} r_3^{\nu_4}. \tag{95}$$

Die Koeffizienten $a_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}$ sind Funktionen von x, y, z, die in $T + S$ stetig sind und beschränkte, höchstens mit Ausnahme des Koordinaten-

ursprunges stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Die unendliche Reihe (95) kann gliedweise differentiiert werden (vgl. loc. cit. [75] S. 522—524). Führt man jetzt die Entwicklung (95) in (90) ein, so erhält man eine Bestimmungsgleichung für r_3, eine „Verzweigungsgleichung“. Sie ist von der Form

$$(96) \qquad \lambda \int_S R^2 u_3 \, d\sigma + \alpha \int_S u_3 d\sigma \int_T \chi' \frac{1}{\varrho(\sigma, \tau')} d\tau' + \mathfrak{P}(\lambda, s(\mathfrak{l}), \alpha; r_3) = 0,$$

unter $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe, die mit den Gliedern zweiten Grades beginnt, verstanden.

Es sei

$$(97) \qquad r_3 = r_3(\lambda, s(\mathfrak{l}), \alpha)$$

eine für $\lambda = s(\mathfrak{l}) = \alpha = 0$ verschwindende Lösung der Gleichung (96). Für hinreichend kleine Werte von $|\lambda|, |s(\mathfrak{l})|, |\alpha|$ ist demnach mit (97) die Bedingungsgleichung (90) gewiß erfüllt. Die Funktion (95) genügt der Integro-Differentialgleichung (61), die Konfiguration $T_1 + S_1$ ist eine Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit. Die Untersuchung der Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der gegebenen Figur ist damit auf die Diskussion der Verzweigungsgleichung (96) zurückgeführt. Wir begnügen uns mit diesen Andeutungen und verweisen im übrigen auf die analogen Betrachtungen auf S. 62ff.[93].

Durch die Betrachtungen auf S. 105ff. ist u. a. die Existenz schwach heterogener Gleichgewichtsfiguren in der Umgebung aller nicht singulären Maclaurinschen und Jacobischen Ellipsoide dargetan. Was die Verzweigungsellipsoide betrifft, so erscheint hier noch eine Diskussion der Verzweigungsgleichung (96) als notwendig. Es ist nicht schwer einzusehen, daß die zu einem vorgegebenen $\mathfrak{l}$, $s(\mathfrak{l})$, χ, α, λ gehörigen neuen Gleichgewichtsfiguren für alle Ausgangsellipsoide einer stetigen, kein Verzweigungsellipsoid enthaltenden abgeschlossenen Schar eine lineare Reihe bilden.

18. Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft einer gegebenen nichthomogenen Gleichgewichtsfigur. Wir legen unseren weiteren Untersuchungen die Integro-Differentialgleichung (43) in ausführlicher Schreibweise

$$(98) \qquad \psi(\tau)\,\zeta(\tau) + \int_S f' \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' - \int_{\mathfrak{S}} [f'] \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' - \int_T \zeta' \frac{\partial f'}{\partial \nu'} \frac{1}{\varrho} d\tau' = s(\mathfrak{r})$$

$$-\alpha \int_{T_1} \chi' \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1' - \lambda \mathfrak{r}^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa} \zeta^2 (a^2 + b^2) - 2\lambda\zeta(ax + by) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \dots)$$

---

[93] Man vergleiche ferner loc. cit. [75], S. 520—525, wo sich einige weitere Einzelheiten finden. Es ist zu beachten, daß a. a. O. $u_1, \dots, u_m$ das bezeichnen, was im Text mit $f u_1, \dots, f u_m$ zu bezeichnen wäre.

zugrunde. Die linke Seite kann (vgl. (47)) auch einfacher in der Form

$$(99) \qquad \psi(\tau)\,\zeta(\tau) - \int_0^\infty df(\mathfrak{r}') \int_{S_{\mathfrak{r}'}} \zeta' \frac{1}{\varrho}\, d\sigma'$$

geschrieben werden. Bezüglich der Dichte f, die auf jeder Niveaufläche des Gesamtpotentials von $T+S$ einen konstanten Wert hat, haben wir in **15.** vorausgesetzt, daß sie abteilungsweise stetig ist und in jedem Stetigkeitsbereiche stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat. Aus Symmetriegründen sind $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ in O gleich Null. Wir wollen darüber hinaus annehmen, daß $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ in einer Umgebung des Koordinatenursprunges einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\mu < 1$ genügt. Da $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ in O verschwindet, so ist augenscheinlich $\frac{\partial f}{\partial \nu} = O(r^\mu)$. Übrigens braucht sich f beim Fortschreiten längs der z-Achse vom Koordinatenursprung nach der Randfläche S hin nicht notwendig monoton zu ändern (nicht zunehmen). Doch darf ψ in $T+S$, außer in dem Koordinatenursprunge, nicht verschwinden. In der Umgebung von O verhält sich ψ wie $O(r)$.[90]

Für $\tau \to 0$ folgt aus (98), da ζ im Koordinatenursprunge verschwindet,

$$(100) \qquad \int_S f' \frac{1}{{}_0\varrho} \zeta' d\sigma' - \int_{\mathfrak{S}} [f'] \frac{1}{{}_0\varrho} \zeta' d\sigma' - \int_T \zeta' \frac{\partial f'}{\partial \nu'} \frac{1}{{}_0\varrho} d\tau'$$
$$= {}_0s - \alpha \int_{T_1} \chi' \frac{1}{{}_0\varrho_1} d\tau_1' - \frac{1}{\varkappa} ({}_0\mathfrak{W}^{(2)} + {}_0\mathfrak{W}^{(3)} + \ldots).$$

Aus (98) und (100) folgt, wenn wir, unter $\bar{\mathfrak{s}}(\mathfrak{r})$ eine nebst ihrer Ableitung stetige Funktion mit $\bar{\mathfrak{s}}(\mathfrak{l}) \neq 0$ verstanden, $s = {}_0s + h\mathfrak{r}^2 \bar{\mathfrak{s}}(\mathfrak{r})$ setzen,

$$(101) \quad \psi(\tau)\,\zeta(\tau) + \int_S f' \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) \zeta' d\sigma' - \int_{\mathfrak{S}} [f'] \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) \zeta' d\sigma'$$
$$- \int_T \zeta' \frac{\partial f'}{\partial \nu'} \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) d\tau' = h\mathfrak{r}^2 \bar{\mathfrak{s}}(\mathfrak{r}) - \alpha \int_{T_1} \chi' \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{{}_0\varrho_1}\right) d\tau_1' - \lambda \mathfrak{r}^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa} \zeta^2 (a^2 + b^2)$$
$$- 2\lambda\zeta\,(ax + by) - \frac{1}{\varkappa} (\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots - {}_0\mathfrak{W}^{(2)} - {}_0\mathfrak{W}^{(3)} - \ldots),$$

oder kürzer (vgl. S. 102)

$$(102) \quad \psi(\tau)\,\zeta(\tau) - \int_0^\infty df(\mathfrak{r}') \int_{S_{\mathfrak{r}'}} \zeta' \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) d\sigma' = h\mathfrak{r}^2 \bar{\mathfrak{s}}(\mathfrak{r}) - \alpha \int_{T_1} \chi' \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{{}_0\varrho_1}\right) d\tau_1'$$
$$- \lambda\mathfrak{r}^2 + \Pi\{\lambda, \zeta\} - {}_0\Pi\{\lambda, \zeta\}.$$

Betrachten wir die homogene Integralgleichung

$$\psi(\tau)\,\zeta(\tau)+\int\limits_S f'\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{{}_0\varrho}\right)\zeta'\,d\sigma'-\int\limits_{\mathfrak{S}}[f']\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{{}_0\varrho}\right)\zeta'\,d\sigma' \tag{103}$$
$$-\int\limits_T \zeta'\frac{\partial f'}{\partial\nu'}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{{}_0\varrho}\right)d\tau'=0,$$

kürzer

$$\psi(\tau)\,\zeta(\tau)-\int\limits_0^\infty df(\mathfrak{r}')\int\limits_{S_{\mathfrak{r}'}}\zeta'\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{{}_0\varrho}\right)d\sigma'=0. \tag{104}$$

Sie stellt, in der Bezeichnungsweise von A. Kneser, eine belastete Integralgleichung dar. Es ist nicht schwer einzusehen, daß, wenn bezüglich einer Nullösung $\zeta(\tau)$ von (103) feststeht, daß sie sich in O wie r^{-1} verhält, sie in $T+S$ gewiß beschränkt ist[94]. Ist eine Nullösung $\zeta(\tau)$ der Integralgleichung (103) in bezug auf alle $k+1$ Symmetrieebenen von T symmetrisch, so hat ζ in $T+S$ beschränkte, außer höchstens in O abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung und ist im Koordinatenursprunge $=0$. Offenbar verschwindet ζ in O wie r.[95] Neben der Integralgleichung (103) betrachten wir jetzt noch die Gleichung

$$\psi(\tau)\,\zeta(\tau)+\int\limits_S f'\frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma'-\int\limits_{\mathfrak{S}}[f']\frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma'-\int\limits_T \zeta'\frac{\partial f'}{\partial\nu'}\frac{1}{\varrho}\,d\tau'=0. \tag{105}$$

Sie hat, falls, wie wir zunächst annehmen wollen, $\omega \neq 0$ ist, gewiß eine Nullösung $\mathfrak{u}_1=\text{const.}\,c$ und, falls T nicht etwa Rotationssymmetrie um die z-Achse hat, eine weitere Nullösung $\mathfrak{u}_2=\text{const.}\,\mathfrak{r}\cos\mathfrak{p}$, unter $\mathfrak{p}$ den Winkel verstanden, der von (ν) und dem bei einer Drehung von T um die z-Achse von dem Punkte P beschriebenen Kreisbogen eingeschlossen wird, $\mathfrak{r}\cos\mathfrak{p}=xb-ya$. Sind alle $S_{\mathfrak{r}}$ Rotationsflächen um die z-Achse, so ist $\mathfrak{r}\cos\mathfrak{p}\equiv 0$, darum $\mathfrak{u}_2\equiv 0$. Ist $\omega=0$, handelt es sich mithin um einen ruhenden Flüssigkeitskörper mit Kugelsymmetrie als Ausgangsfigur, so hat die Integralgleichung (105) die Funktionen $\mathfrak{u}_1=\text{const.}\,c$, $\mathfrak{u}_{11}=\text{const.}\,a$, $\mathfrak{u}_{12}=\text{const.}\,b$ zu Nullösungen. Alle diese Nullösungen hängen eng mit Ortsänderungen zusammen, die $T+S$, als starrer Körper aufgefaßt, ausführen darf, ohne aufzuhören, Gleichgewichtsfigur zu sein. Wir nennen sie darum auch diesmal „triviale Nullösungen" (vgl. loc. cit. [75] S. 532—535).

[94] Vgl. loc. cit. [75], S. 527—528. Die Möglichkeit, daß $\zeta(\tau)$ in O von einer höheren Ordnung unendlich wird, braucht nicht berücksichtigt zu werden. (Vgl. a. a. O. S. 553.)

[95] Vgl. loc. cit. [75], S. 527—532. Übrigens wird a. a. O. vorausgesetzt, daß $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ in einer Umgebung des Koordinatenursprunges einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\mu<1$ genügen. Hieraus ergibt sich dann, daß $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ die gleiche Eigenschaft hat.

Man überzeugt sich leicht, daß $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$ bzw. $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_{11}$, $\mathfrak{u}_{12}$ zugleich Nulllösungen der Integralgleichung (103) sind. In der Tat ist beispielsweise

$$\int\limits_S f' \frac{1}{{}_0\varrho} \mathfrak{u}_1' \, d\sigma' - \int\limits_{\mathfrak{S}} [f'] \frac{1}{{}_0\varrho} \mathfrak{u}_1' \, d\sigma' - \int\limits_T \frac{\partial f'}{\partial \nu'} \mathfrak{u}_1' \frac{1}{{}_0\varrho} \, d\tau' = 0,$$

da $\mathfrak{u}_1$ beim Übergang von τ zu dem in bezug auf die Ebene $z = 0$ symmetrisch gelegenen Punkte das Zeichen wechselt. Hat $T + S$ Kugelsymmetrie in bezug auf den Ursprung, so sind $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_{11}$, $\mathfrak{u}_{12}$, wie wir sogleich sehen werden, die *einzigen* Nullösungen der Integralgleichung (103), die wir kürzer in der Form

$$\psi(\tau)\,\zeta(\tau) - \int\limits_0^\infty df(\mathfrak{r}') \int\limits_{S_{\mathfrak{r}'}} \zeta' \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) d\sigma' = 0 \tag{106}$$

schreiben können, woselbst diesmal ${}_0\varrho = r'$ ist[96]. Wie wir wissen, sind etwaige Nullösungen dieser Integralgleichung, die in der Umgebung des Ursprunges nicht stärker unendlich werden als $\frac{1}{r}$, tatsächlich in $T + S$ beschränkt (vgl. S. 114) und höchstens mit Ausnahme des Punktes O stetig.

Wir setzen, unter Y_{nm} $(m = 1, 2, \ldots, 2n + 1)$ die allgemeinen orthogonalisierten und in irgendeiner bestimmten Weise normierten Kugelfunktionen n-ter Ordnung des Polarwinkels θ und des Azimuts $\mathfrak{d}$ verstanden, im Sinne der Äquivalenz

$$\zeta(\tau) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \zeta_{nm}(r)\, Y_{nm}. \tag{107}$$

Hierin bezeichnet $\zeta_{nm} = \zeta_{nm}(r)$ eine beschränkte, in dem halboffenen Intervalle $(0, \mathfrak{R}\rangle$ stetige Funktion (vgl. die Formel (111)). Der Kugelsymmetrie halber können wir diesmal speziell

$$\psi(\tau) = \psi(r), \quad f(\mathfrak{r}) = f(r) \tag{108}$$

setzen und auch $S_{r'}$ für $S_{\mathfrak{r}'}$ schreiben.

Nach bekannten Sätzen ist für $n \geqq 1$

$$\int\limits_{S_{r'}} \frac{1}{\varrho(\tau, \sigma')} Y_{nm}(\theta', \mathfrak{d}')\, d\sigma' = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{2n+1} \dfrac{r^n}{(r')^{n-1}} Y_{nm}(\theta, \mathfrak{d}) & \text{für } r \leqq r', \\[2ex] \dfrac{4\pi}{2n+1} \dfrac{(r')^{n+2}}{r^{n+1}} Y_{nm}(\theta, \mathfrak{d}) & \text{für } r' \leqq r \end{cases} \tag{109}$$ [97]

und darum beiläufig für $n \geqq 1$

$$\int\limits_{S_{r'}} Y_{nm}(\theta', \mathfrak{d}')\, d\sigma' = 0. \tag{110}$$

---

[96] In (106) kann ζ für $\mathfrak{r} > \mathfrak{R}$ ($\mathfrak{R}$ = Radius des Kugelkörpers $T + S$) beliebig angenommen werden, denn für $\mathfrak{r} > \mathfrak{R}$ ist ja $f = 0$ zu setzen.

[97] Vgl. beispielsweise A. Liapounoff, loc. cit. [40] a) S. 18. A. a. O. bezeichnet $d\sigma'$ das Flächenelement der Einheitskugel.

Wir finden jetzt für $n \geqq 1$

$$\int\limits_{S_r} Y_{nm}(\theta, \mathfrak{d})\, d\sigma \int\limits_0^\infty df(r') \int\limits_{S_{r'}} \zeta' \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) d\sigma' = \int\limits_0^\infty df(r') \int\limits_{S_{r'}} \zeta'\, d\sigma' \int\limits_{S_r} Y_{nm}(\theta, \mathfrak{d}) \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) d\sigma$$

$$= \frac{4\pi}{2\pi+1} \int\limits_0^r df(r') \int\limits_{S_{r'}} Y_{nm}(\theta', \mathfrak{d}') \frac{r'^n}{r^{n-1}} \zeta'\, d\sigma' + \frac{4\pi}{2n+1} \int\limits_r^\infty df(r') \int\limits_{S_{r'}} Y_{nm}(\theta', \mathfrak{d}') \frac{r^{n+2}}{r'^{n+1}} \zeta'\, d\sigma'.$$

Wegen (107) ist

$$(111) \qquad \int\limits_{S_r} \zeta Y_{nm}(\theta, \mathfrak{d})\, d\sigma = r^2 \zeta_{nm}(r) \int\limits_{\mathfrak{S}_0} (Y_{nm}(\theta, \mathfrak{d}))^2 d\sigma = A_{nm} r^2 \zeta_{nm}(r),$$ [98]

die Integration rechter Hand erstreckt über die Oberfläche der Einheitskugel $\mathfrak{S}_0$ um O. Demnach gilt für $n \geqq 1$

$$(112) \qquad \int\limits_{S_r} Y_{nm}(\theta, \mathfrak{d})\, d\sigma \int\limits_0^\infty df(r') \int\limits_{S_{r'}} \zeta' \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) d\sigma'$$

$$= \frac{4\pi}{2n+1} A_{nm} \int\limits_0^r \frac{r'^{n+2}}{r^{n-1}} \zeta_{nm}(r')\, df(r') + \frac{4\pi}{2n+1} A_{nm} \int\limits_r^\infty \frac{r^{n+2}}{r'^{n-1}} \zeta_{nm}(r')\, df(r').$$

Aus (106), (111) und (112) folgt jetzt für $n \geqq 1$ fast unmittelbar

$$(113) \qquad \psi(r)\, \zeta_{nm}(r) - \frac{4\pi}{2n+1} \int\limits_0^r \zeta_{nm}(r') \frac{(r')^{n+2}}{r^{n+1}} df(r')$$

$$- \frac{4\pi}{2n+1} \int\limits_r^\infty \zeta_{nm}(r') \frac{r^n}{(r')^{n-1}} df(r') = 0, \quad n \geqq 1 \quad (m = 1, \ldots, 2n+1).$$

Der Einfachheit halber wollen wir im folgenden ζ_n für ζ_{nm} schreiben. Wird die linke Seite der Gleichung (106) über S_r integriert, so findet man

$$(114) \qquad \psi(r) \int\limits_{S_r} \zeta(\tau)\, d\sigma - \int\limits_0^\infty df(r') \int\limits_{S_{r'}} \zeta(\tau')\, d\sigma' \int\limits_{S_r} \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) d\sigma = 0.$$

Nach bekannten Sätzen ist

$$(115) \qquad \int\limits_{S_r} \frac{1}{\varrho}\, d\sigma = \frac{4\pi r^2}{r'} \text{ für } r' \geqq r, \quad = 4\pi r \text{ für } r' \leqq r,$$

[98] Wir setzen zur Abkürzung $\int\limits_{\mathfrak{S}_0} (Y_{nm}(\theta, \mathfrak{d}))^2 d\sigma = A_{nm}$. Die Art der Normierung der Kugelfunktionen $Y_{nm}(\theta, \mathfrak{d})$ ist für die folgenden Betrachtungen belanglos.

so daß wir für (114) wegen $\psi(r) = -\frac{4\pi}{r^2}\int\limits_0^r f(r')\, r'^2\, dr'$, ${}_0\varrho = r'$, $\int\limits_{S_r} \frac{1}{{}_0\varrho}\, d\sigma = \frac{4\pi r^2}{r'}$

$$(116)\qquad \frac{1}{r^2}\int\limits_0^r f(r')\, r'^2\, dr' \int\limits_{S_r} \zeta(\tau)\, d\sigma + \int\limits_0^r df(r') \int\limits_{S_{r'}} \zeta(\tau')\, d\sigma' \left(r - \frac{r^2}{r'}\right) = 0$$

schreiben können.

Aus (107) folgt, wenn wir $Y_{01} = 1$ annehmen und für ζ_{01} einfacher ζ_0 setzen,

$$(117)\qquad \int\limits_{S_r} \zeta(\tau)\, d\sigma = 4\pi r^2 \zeta_0(r), \qquad \int\limits_{S_{r'}} \zeta(\tau')\, d\sigma' \left(r - \frac{r^2}{r'}\right) = 4\pi r'^2 \zeta_0(r') \left(r - \frac{r^2}{r'}\right),$$

und (116) geht über in

$$(118)\qquad \zeta_0(r) \int\limits_0^r f(r')\, r'^2\, dr' + r \int\limits_0^r \zeta_0(r')\, r'(r' - r)\, df(r') = 0.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich, selbst wenn man, wie wir es in den folgenden Zeilen tun wollen, bezüglich der Funktion $f(r)$ lediglich voraussetzt, daß sie nicht zunimmt, ohne notwendigerweise stetig zu sein, daß $\zeta_0(r) \equiv 0$ ist (vgl. loc. cit.[75] S. 538—539).

Betrachten wir jetzt die Beziehung

$$(119)\qquad \psi(r)\, \zeta_n(r) - \frac{4\pi}{(2n+1)\, r^{n+1}} \int\limits_0^r \zeta_n(r')\, (r')^{n+2}\, df(r')$$
$$- \frac{4\pi r^n}{2n+1} \int\limits_r^\infty \zeta_n(r') \frac{1}{(r')^{n-1}}\, df(r') = 0 \qquad (n \geqq 1).$$

Sie hat nur für $n = 1$ beschränkte, von Null verschiedene Lösungen.

Es ist vor allem leicht zu sehen, daß die Integralgleichung

$$(120)\qquad \psi(r)\, \zeta_1(r) - \frac{4\pi}{3 r^2} \int\limits_0^r \zeta_1(r')\, r'^3\, df(r') - \frac{4\pi r}{3} \int\limits_r^\infty \zeta_1(r')\, df(r') = 0,$$

in die (119) für $n = 1$ übergeht, durch $\zeta_1(r) \equiv 1$ befriedigt wird. Diese Lösung führt zu den eingangs gefundenen trivialen Nullösungen $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_{11}$, $\mathfrak{u}_{12}$.

In der Tat ist, wie eine teilweise Integration lehrt,

$$(121)\qquad \int\limits_0^r r'^3\, df(r') = r^3 f(r) - 3\int\limits_0^r r'^2 f(r')\, dr', \qquad \int\limits_r^\infty df(r') = -f(r),$$

somit

$$(122)\qquad \frac{4\pi}{3r^2}\int_0^r r'^3 df(r') + \frac{4\pi r}{3}\int_r^\infty df(r') = \frac{4\pi r}{3} f(r) - \frac{4\pi}{r^2}\int_0^r r'^2 f(r')\, dr' - \frac{4\pi r}{3} f(r)$$

$$= -\frac{4\pi}{r^2}\int_0^r f(r')\, r'^2 dr' = \psi(r),$$

so daß $\zeta_1 \equiv 1$ die Gleichung (120) tatsächlich befriedigt. Daß sie keine weiteren beschränkten, von der Lösung $\zeta_1 \equiv 1$ linear unabhängigen Lösungen hat, ist an der mehrfach genannten Stelle S. 540—541 gezeigt worden.

Es sei schließlich $n > 1$. Die Gleichung (119), die wir in der Form

$$(123)\qquad \psi(r)\,\zeta_n(r) = \frac{4\pi}{(2n+1)\,r^2}\int_0^r \zeta_n(r')\left(\frac{r'}{r}\right)^{n-1} r'^3 df(r')$$

$$+ \frac{4\pi r}{2n+1}\int_r^\infty \zeta_n(r')\left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1} df(r')$$

schreiben können, liefert mit $|\zeta_n(r)| < L$

$$|\psi(r)\,\zeta_n(r)| \leqq -\frac{4\pi L}{(2n+1)\,r^2}\int_0^r r'^3 df(r') - \frac{4\pi r L}{2n+1}\int_r^\infty df(r')$$

$$(124)\qquad = -\frac{4\pi L}{(2n+1)\,r^2}\left\{[r'^3 f(r')]_0^r - \int_0^r 3 r'^2 f(r')\, dr'\right\} - \frac{4\pi r L}{2n+1}[f(r')]_r^\infty$$

$$= \frac{4\pi L}{(2n+1)\,r^2}\,\frac{3r^2}{4\pi}\,|\psi(r)|,$$

somit

$$(125)\qquad |\zeta_n(r)| \leqq \frac{3L}{2n+1},$$

darum für $n > 1$ gewiß $\zeta_n(r) \equiv 0$.[99]

Wir kehren jetzt zu der Voraussetzung $\omega \neq 0$ zurück. Die Integralgleichungen (103) und (105) haben gewiß $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$ zu Nullösungen. Hat $T+S$ Rotationssymmetrie um die Gerade $z=0$, so ist überdies, wie wir wissen, $\mathfrak{u}_2 \equiv 0$.

Es sei zur Abkürzung für alle τ in $T+S$

$$(126)\qquad \boldsymbol{K}(\tau,\tau') = \begin{cases} -\dfrac{1}{\psi(\tau)}\,\dfrac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'}\,\dfrac{1}{\varrho(\tau,\tau')} & \text{für } \tau' \text{ in } T, \text{ jedoch nicht auf } \mathfrak{S}, \\[2ex] \dfrac{f(\sigma')}{\psi(\tau)}\,\dfrac{1}{\varrho(\tau,\sigma')}, & \tau' = \sigma' \text{ auf } S, \\[2ex] -\dfrac{[f(\sigma')]}{\psi(\tau)}\,\dfrac{1}{\varrho(\tau,\sigma')}, & \tau' = \sigma' \text{ auf } \mathfrak{S}, \end{cases}$$

[99] Den vorstehenden Beweis, daß $\zeta_n(r) \equiv 0$ ist für $n > 1$, verdanke ich einer freundlichen brieflichen Mitteilung des Herrn Kostitzin.

$\boldsymbol{d\tau} = d\tau$ in T, jedoch nicht auf $\mathfrak{S}$, $= d\sigma$ auf S und $\mathfrak{S}$ gesetzt. Die Integralgleichung (105) nimmt damit die Form

$$\zeta(\tau) + \int \boldsymbol{K}(\tau, \tau')\, \zeta(\tau')\, \boldsymbol{d\tau}' = 0 \tag{127}$$

an. Die hierzu adjungierte Integralgleichung

$$\boldsymbol{w}(\tau') + \int \boldsymbol{K}(\tau, \tau')\, \boldsymbol{w}(\tau)\, \boldsymbol{d\tau} = 0 \tag{128}$$

faßt, wenn

$$\boldsymbol{w}(\tau') = \begin{cases} w(\tau') & \text{für } \tau' \text{ in } T, \text{ jedoch nicht auf } \mathfrak{S}, \\ w_S(\sigma'), & \tau' = \sigma' \text{ auf } S, \\ w_{\mathfrak{S}}(\sigma'), & \tau' = \sigma' \text{ auf } \mathfrak{S} \end{cases} \tag{129}$$

gesetzt wird, voll ausgeschrieben die drei simultanen homogenen Integralgleichungen

$$\begin{aligned} & w(\tau') - \int_T \frac{1}{\psi(\tau)} \frac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'} \frac{1}{\varrho(\tau, \tau')} w(\tau)\, d\tau - \int_S \frac{1}{\psi(\sigma)} \frac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'} \frac{1}{\varrho(\sigma, \tau')} w_S(\sigma)\, d\sigma \\ & \qquad - \int_{\mathfrak{S}} \frac{1}{\psi(\sigma)} \frac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'} \frac{1}{\varrho(\sigma, \tau')} w_{\mathfrak{S}}(\sigma)\, d\sigma = 0, \\ & w_S(\sigma') + \int_T \frac{f(\sigma')}{\psi(\tau)} \frac{1}{\varrho(\tau, \sigma')} w(\tau)\, d\tau + \int_S \frac{f(\sigma')}{\psi(\sigma)} \frac{1}{\varrho(\sigma, \sigma')} w_S(\sigma)\, d\sigma \\ & \qquad + \int_{\mathfrak{S}} \frac{f(\sigma')}{\psi(\sigma)} \frac{1}{\varrho(\sigma, \sigma')} w_{\mathfrak{S}}(\sigma)\, d\sigma = 0, \\ & w_{\mathfrak{S}}(\sigma') - \int_T \frac{[f(\sigma')]}{\psi(\tau)} \frac{1}{\varrho(\tau, \sigma')} w(\tau)\, d\tau - \int_S \frac{[f(\sigma')]}{\psi(\sigma)} \frac{1}{\varrho(\sigma, \sigma')} w_S(\sigma)\, d\sigma \\ & \qquad - \int_{\mathfrak{S}} \frac{[f(\sigma')]}{\psi(\sigma)} \frac{1}{\varrho(\sigma, \sigma')} w_{\mathfrak{S}}(\sigma)\, d\sigma = 0 \end{aligned} \tag{130}$$

zusammen[100]. Man verifiziert leicht, daß, wenn $\zeta(\tau)$ eine Lösung der Gleichung (105), beispielsweise $\mathfrak{u}_1$ oder $\mathfrak{u}_2$ bezeichnet, das System

$$\begin{gathered} w(\tau') = -\frac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'} \psi(\tau')\, \zeta(\tau'), \quad w_S(\sigma') = f(\sigma')\, \psi(\sigma')\, \zeta(\sigma'), \\ w_{\mathfrak{S}}(\sigma') = -[f(\sigma')]\, \psi(\sigma')\, \zeta(\sigma') \end{gathered} \tag{131}$$

die Gleichungen (130) befriedigt.

Wir denken uns $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$ irgendwie, etwa den Beziehungen

$$\begin{aligned} \int \mathfrak{u}_1^2(\tau)\, \boldsymbol{d\tau} &= \int_T \mathfrak{u}_1^2(\tau)\, d\tau + \int_{S+\mathfrak{S}} \mathfrak{u}_1^2(\sigma)\, d\sigma = 1, \\ \int \mathfrak{u}_2^2(\tau)\, \boldsymbol{d\tau} &= \int_T \mathfrak{u}_2^2(\tau)\, d\tau + \int_{S+\mathfrak{S}} \mathfrak{u}_2^2(\sigma)\, d\sigma = 1 \end{aligned} \tag{132}$$

---

[100] Vgl. bsp. meine Note, Bemerkungen über belastete Integralgleichungen, Studia mathematica **3** (1931), S. 212—225.

gemäß normiert. Augenscheinlich ist die „Orthogonalitätsbeziehung"

$$(133) \qquad \int \mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2 \, d\tau = \int_T \mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2 \, d\tau + \int_{S+\mathfrak{S}} \mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2 \, d\sigma = 0$$

erfüllt. Es seien $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$ die den analogen Normierungs- und Orthogonalisierungsbeziehungen genügenden Nullösungen der Integralgleichung (128)

$$(134) \qquad \begin{gathered} \int \mathfrak{u}_1^2(\tau)\, d\tau = \int_T \mathfrak{u}_1^2(\tau)\, d\tau + \int_{S+\mathfrak{S}} \mathfrak{u}_1^2(\sigma)\, d\sigma = 1, \\ \int \mathfrak{u}_2^2\, d\tau = \int_T \mathfrak{u}_2^2\, d\tau + \int_{S+\mathfrak{S}} \mathfrak{u}_2^2\, d\sigma = 1, \quad \int \mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2\, d\tau = \int_T \mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2\, d\tau + \int_{S+\mathfrak{S}} \mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2\, d\sigma = 0. \end{gathered}$$

Offenbar ist, unter Zugrundelegung der in (129), (131) benutzten Schreibweise, z. B.

$$(135) \qquad \begin{gathered} \mathfrak{u}_1(\tau) = -\frac{\partial f(\tau)}{\partial \nu} \psi(\tau)\, u_1(\tau) \cdot C^{-1}, \qquad \mathfrak{u}_{1S}(\sigma) = f(\sigma)\, \psi(\sigma)\, u_1(\sigma) \cdot C^{-1}, \\ \mathfrak{u}_{1\mathfrak{S}}(\sigma) = -[f(\sigma)]\, \psi(\sigma)\, u_1(\sigma) \cdot C^{-1}, \end{gathered}$$

$$C^2 = \int_T \left(\frac{\partial f(\tau)}{\partial \nu}\right)^2 \psi^2(\tau)\, u_1^2(\tau)\, d\tau + \int_S f^2(\sigma)\, \psi^2(\sigma)\, u_1^2(\sigma)\, d\sigma + \int_{\mathfrak{S}} [f(\sigma)]^2\, \psi^2(\sigma)\, u_1^2(\sigma)\, d\sigma$$
$$(C > 0).$$

Es sei $\boldsymbol{L}(\tau, \tau')$ der Kern, den man erhält, wenn man in (126) allemal $\frac{1}{\varrho}$ durch $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}$ ersetzt (vgl. die Formeln (138)). Die Integralgleichung

$$(136) \qquad \zeta(\tau) + \int \boldsymbol{L}(\tau, \tau')\, \zeta(\tau')\, d\tau' = 0,$$

die offenbar mit der Integralgleichung (103) identisch ist, hat, wie wir wissen (vgl. S. 115), u_1 und u_2 zu Nullösungen. Wir nehmen an, daß diese „trivialen Nullösungen" ihre einzigen Lösungen sind. Man überzeugt sich leicht, daß $\mathfrak{u}_1(\tau)$ und $\mathfrak{u}_2(\tau)$ die zu (103) adjungierte Integralgleichung

$$\boldsymbol{w}(\tau') + \int \boldsymbol{L}(\tau, \tau')\, \boldsymbol{w}(\tau)\, d\tau = 0$$

befriedigt. Nach bekannten Sätzen hat die Integralgleichung

$$\zeta(\tau) + \int \boldsymbol{M}(\tau, \tau')\, \zeta(\tau')\, d\tau' = 0,$$

$$\boldsymbol{M}(\tau, \tau') = \boldsymbol{L}(\tau, \tau') - \mathfrak{u}_1(\tau)\, u_1(\tau') - \mathfrak{u}_2(\tau)\, u_2(\tau')$$

keine Nullösungen mehr (vgl. loc. cit. [75] die Fußnote [95]).

Es sei jetzt $g(\tau)$ eine in $T + S$ erklärte stetige Funktion, die daselbst stetige, allenfalls auf $\mathfrak{S}$ sprungweise unstetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt und darüber hinaus folgende Eigenschaften hat. Sie ist in bezug auf die $k+1$ Symmetrieebenen von $T+S$ symmetrisch und verschwindet in O. Ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung, die aus Gründen der Symmetrie in O gleich Null sind, verschwinden dort wie r. Dies hat zur Folge, daß sich g in der Umgebung des Koordinatenur-

sprunges wie r^2 verhält. Wir betrachten jetzt die nicht homogene „belastete“ Integralgleichung

$$(137)\qquad \psi(\tau)\,\zeta(\tau)+\int\limits_S f'\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{{}_0\varrho}\right)\zeta'\,d\sigma'-\int\limits_{\mathfrak{S}}[f']\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{{}_0\varrho}\right)\zeta'\,d\sigma'$$
$$-\int\limits_T \zeta'\frac{\partial f'}{\partial \nu'}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{{}_0\varrho}\right)d\tau'=g(\tau)\,.$$

Es sei ähnlich wie auf S. 118 für alle τ in $T+S$

$$(138)\qquad \boldsymbol{L}(\tau,\tau')=\begin{cases}-\dfrac{1}{\psi(\tau)}\dfrac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'}\left(\dfrac{1}{\varrho(\tau,\tau')}-\dfrac{1}{{}_0\varrho(\tau')}\right) & \text{für } \tau' \text{ in } T, \text{ jedoch nicht auf } \mathfrak{S},\\[2mm] \dfrac{f(\sigma')}{\psi(\tau)}\left(\dfrac{1}{\varrho(\tau,\sigma')}-\dfrac{1}{{}_0\varrho(\sigma')}\right), & \tau'=\sigma' \text{ auf } S,\\[2mm] -\dfrac{[f(\sigma')]}{\psi(\tau)}\left(\dfrac{1}{\varrho(\tau,\sigma')}-\dfrac{1}{{}_0\varrho(\sigma')}\right), & \tau'=\sigma' \text{ auf } \mathfrak{S},\end{cases}$$

$\boldsymbol{d\tau}=d\tau$ in T, jedoch nicht auf $\mathfrak{S}$, $=d\sigma$ auf S und $\mathfrak{S}$ gesetzt. Die Integralgleichung (137) kann kürzer in der Form

$$(139)\qquad \zeta(\tau)+\int \boldsymbol{L}(\tau,\tau')\,\zeta(\tau')\,\boldsymbol{d\tau}'=\frac{1}{\psi(\tau)}\,g(\tau)$$

geschrieben werden.

Es sei $\zeta(\tau)$ eine in $T+S$, außer höchstens in O, wo sie sich wie r^{-1} verhält, stetige Lösung dieser Integralgleichung, von der wir überdies wissen, daß sie die Ebenen der Symmetrie von $T+S$ zu Symmetrieebenen hat. Alsdann ist, wie sich ohne Mühe zeigen läßt, $\zeta(\tau)$ in $T+S$ stetig, hat daselbst beschränkte und außer höchstens in O in jedem Stetigkeitsbereiche von f stetige Ableitungen erster Ordnung und verschwindet im Koordinatenursprunge. Demnach verhält sich $\zeta(\tau)$ in der Umgebung von O wie r (vgl. loc. cit. [75] S. 550).

Es sei jetzt $\mathfrak{g}(\tau)$ irgendeine in $T+S$ erklärte stetige Funktion. Betrachten wir die Integralgleichung

$$(140)\qquad \zeta(\tau)+\int \boldsymbol{M}(\tau,\tau')\,\zeta(\tau')\,\boldsymbol{d\tau}'=\frac{1}{\psi(\tau)}\,\mathfrak{g}(\tau)\,.$$

Sie hat eine und nur eine in $T+S$, außer höchstens in O, stetige Lösung, die in der Umgebung des Ursprunges höchstens wie $\frac{1}{r}$ unendlich wird. Ist $\mathfrak{g}(\tau)$ überdies in bezug auf die $k+1$ Symmetrieebenen des Systems symmetrisch, so gilt für $\zeta(\tau)$ das gleiche. Augenscheinlich erfüllt alsdann $\zeta(\tau)$ die Integralgleichung (137), in der diesmal $g(\tau)$ durch $\mathfrak{g}(\tau)$ zu ersetzen ist. Sie besitzt also, wenn $\mathfrak{g}(\tau)$ auch noch die übrigen soeben angebenen Eigenschaften der Funktion $g(\tau)$ hat, beschränkte und in jedem Stetigkeitsbereiche von f, außer höchstens in O, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung und verschwindet im Koordinatenursprung.

Wir setzen $\psi(\tau)\,\zeta(\tau) = Z(\tau)$ und erhalten zur Bestimmung von $Z(\tau)$ die Integralgleichung

$$Z(\tau) + \int \boldsymbol{P}(\tau,\tau')\, Z(\tau')\, d\tau' = \mathfrak{g}(\tau), \tag{141}$$

deren Kern $\boldsymbol{P}(\tau,\tau')$ wie folgt erklärt ist. Es gilt

$$\boldsymbol{P}(\tau,\tau') = \boldsymbol{Q}(\tau,\tau') - \frac{\psi(\tau)}{\psi(\tau')}\left(\mathfrak{u}_1(\tau)\,\mathfrak{u}_1(\tau') + \mathfrak{u}_2(\tau)\,\mathfrak{u}_2(\tau')\right), \tag{142}$$

$$\boldsymbol{Q}(\tau,\tau') = \begin{cases} -\dfrac{1}{\psi(\tau')}\dfrac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'}\left(\dfrac{1}{\varrho(\tau,\tau')} - \dfrac{1}{{}_0\varrho(\tau')}\right) & \text{für } \tau' \text{ in } T, \text{ jedoch nicht auf } \mathfrak{S}, \\ \dfrac{f(\sigma')}{\psi(\tau')}\left(\dfrac{1}{\varrho(\tau,\sigma')} - \dfrac{1}{{}_0\varrho(\sigma')}\right), & \tau' = \sigma' \text{ auf } S, \\ -\dfrac{[f(\sigma')]}{\psi(\tau')}\left(\dfrac{1}{\varrho(\tau,\sigma')} - \dfrac{1}{{}_0\varrho(\sigma')}\right), & \tau' = \sigma' \text{ auf } \mathfrak{S}. \end{cases} \tag{143}$$

Da nach Voraussetzung (vgl. S. 93) $\dfrac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'}$ in O wie $(r')^{\mu}$ verschwindet, so verhalten sich die Ausdrücke $-\dfrac{1}{\psi(\tau')}\dfrac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'}\dfrac{1}{\varrho(\tau,\tau')}$ bzw. $\dfrac{1}{\psi(\tau')}\dfrac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'}\dfrac{1}{{}_0\varrho(\tau')}$ entsprechend wie $\dfrac{1}{(r')^{1-\mu}\varrho(\tau,\tau')}$ und $\dfrac{1}{(r')^{2-\mu}}$. Es sei $\boldsymbol{P}^{(2)}(\tau,\tau')$ der zu $\boldsymbol{P}(\tau,\tau') = \boldsymbol{P}^{(1)}(\tau,\tau')$ gehörige iterierte Kern. Er verhält sich für gegen Null konvergierende Werte von r' und $\varrho(\tau,\tau')$ wie $(r')^{\mu-2}$ (vgl. loc. cit. [75] S. 551—552). In der Umgebung von S und $\mathfrak{S}$ wird $\boldsymbol{P}^{(2)}(\tau,\tau')$ wie $\log\dfrac{1}{\varrho(\tau,\tau')}$ unendlich. Der zweite iterierte Kern $\boldsymbol{P}^{(3)}(\tau,\tau')$ verhält sich für alle τ und τ' wie $(r')^{\mu-2}$. Diese Singularität läßt sich auch durch weitere Iterationen nicht beheben. Gleichwohl läßt sich auf die Integralgleichung

$$Z(\tau) - \int \boldsymbol{P}^{(3)}(\tau,\tau')\, Z(\tau')\, d\tau' = \mathfrak{f}(\tau) \qquad (\mathfrak{f}(\tau) \text{ in } T+S \text{ stetig})$$

die Fredholmsche Theorie fast ohne weiteres anwenden (vgl. loc. cit. [75] S. 553—554).

Die Integro-Differentialgleichung (101) läßt sich jetzt, wie man leicht erkennt, auf die Form

$$\begin{aligned} &\zeta(\tau) + \int \boldsymbol{M}(\tau,\tau')\,\zeta(\tau')\,d\tau' \\ &= \frac{1}{\psi(\tau)}\Big[h\mathfrak{r}^2\mathfrak{s}(\mathfrak{r}) - \alpha\int\limits_{T_1}\chi'\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{{}_0\varrho_1}\right)d\tau_1' - \lambda\mathfrak{r}^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2) - 2\lambda\zeta(ax+by) \\ &\qquad - \frac{1}{\varkappa}\left(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \dots - {}_0\mathfrak{W}^{(2)} - {}_0\mathfrak{W}^{(3)} - \dots\right)\Big] \\ &= \frac{1}{\psi(\tau)}\Big[h\mathfrak{r}^2\mathfrak{s}(\mathfrak{r}) - \alpha\int\limits_{T_1}\chi'\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{{}_0\varrho_1}\right)d\tau_1' - \lambda\mathfrak{r}^2 + \Pi\{\lambda,\zeta\} - {}_0\Pi\{\lambda,\zeta\}\Big] \end{aligned} \tag{144}$$

bringen.

Die Ergebnisse, über die im vorstehenden referiert worden ist, bilden die Grundlage für das Verfahren der sukzessiven Approximationen, das

nunmehr einzusetzen hat. Eine wesentliche Rolle spielen hierbei die am Schluß der Nummer **16.** angegebenen Ungleichheiten. Wegen der Einzelheiten muß auf meine wiederholt genannte Abhandlung (S. 554 bis 559) verwiesen werden. Dort finden sich auch Bemerkungen, die den noch möglichen Verzweigungsfall betreffen.

19. Figur der Erde. Während vorhin die Winkelgeschwindigkeit ω als von Null verschieden vorausgesetzt wurde, wird jetzt $\omega = 0$ angenommen. Wir gehen also von dem Ruhezustande aus; $T+S$ ist eine aus konzentrischen Kugelschichten gleicher Dichte bestehende Flüssigkeitsmasse. Bezüglich der Dichte $f(r)$ gelten unsere früheren Festsetzungen. Die homogene Integralgleichung (103) hat jetzt als einzige Lösungen die drei trivialen Nullösungen $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_{11}, \mathfrak{u}_{12}$. Die Lösungen der zu (103) adjungierten Integralgleichung sind durch die Formeln (135) und die dazu analogen auf $\mathfrak{u}_{11}, \mathfrak{u}_{12}$ bezüglichen Formeln gegeben und werden mit fetten Buchstaben bezeichnet. Wir denken uns alle diese Funktionen wie in **18.** die Lösungen $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \boldsymbol{\mathfrak{u}}_1, \boldsymbol{\mathfrak{u}}_2$ etwa den Beziehungen

$$(145)\qquad \int \mathfrak{u}_1^2\, d\tau = \int \mathfrak{u}_{11}^2\, d\tau = \int \mathfrak{u}_{12}^2\, d\tau = 1, \qquad \int \boldsymbol{\mathfrak{u}}_1^2\, d\tau = \int \boldsymbol{\mathfrak{u}}_{11}^2\, d\tau = \int \boldsymbol{\mathfrak{u}}_{12}^2\, d\tau = 1$$

gemäß normiert und setzen

$$(146)\qquad \hat{\boldsymbol{P}}(\tau, \tau') = \boldsymbol{L}(\tau, \tau') - \boldsymbol{\mathfrak{u}}_1(\tau)\, \mathfrak{u}_1(\tau') - \boldsymbol{\mathfrak{u}}_{11}(\tau)\, \mathfrak{u}_{11}(\tau') - \boldsymbol{\mathfrak{u}}_{12}(\tau)\, \mathfrak{u}_{12}(\tau').$$

Den sukzessiven Näherungen liegt diesmal die Integralgleichung zugrunde, die man erhält, wenn man in (144) $\boldsymbol{M}(\tau, \tau')$ durch $\hat{\boldsymbol{P}}(\tau, \tau')$ ersetzt. Wir nehmen insbesondere $\alpha = 0$, $\lambda \neq 0$ an.

Augenscheinlich hat jetzt die Dichte in den korrespondierenden Punkten der beiden Gleichgewichtskonfigurationen $T+S$ und T_1+S_1 denselben Wert. Betrachten wir die erste Approximation $\overset{1}{\zeta}$ etwas näher. Es gilt

$$(147)\qquad \overset{1}{\zeta}(\tau) + \int \hat{\boldsymbol{P}}(\tau, \tau')\, \overset{1}{\zeta}(\tau')\, d\tau' = \frac{1}{\psi(\tau)}\left[h\, r^2 \mathfrak{s}(r) - \lambda \mathfrak{r}^2\right].$$

Da $\overset{1}{\zeta}(\tau)$, wie übrigens auch alle höheren Näherungen die Ebene $z = 0$ sowie jede Ebene durch die Rotationsachse zur Symmetrieebene hat, so ist

$$(148)\qquad \int \overset{1}{\zeta}(\tau')\, \mathfrak{u}_1(\tau')\, d\tau' = \int \overset{1}{\zeta}(\tau')\, \mathfrak{u}_{11}(\tau')\, d\tau' = \int \overset{1}{\zeta}(\tau')\, \mathfrak{u}_{12}(\tau')\, d\tau' = 0.$$

Demnach genügt $\overset{1}{\zeta}(\tau')$ der Integralgleichung

$$(149)\qquad \psi(\tau)\, \overset{1}{\zeta}(\tau) + \int_S f'\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{_0\varrho}\right) \overset{1}{\zeta}{}'\, d\sigma' - \int_{\mathfrak{S}} [f']\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{_0\varrho}\right) \overset{1}{\zeta}{}'\, d\sigma'$$
$$- \int_T \overset{1}{\zeta}{}' \frac{\partial f'}{\partial \nu'}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{_0\varrho}\right) d\tau' = h\, r^2 \mathfrak{s}(r) - \lambda \mathfrak{r}^2, \quad \text{kürzer}$$

$$(150)\qquad \psi(\tau)\, \overset{1}{\zeta}(\tau) - \int_0^\infty d f(r') \int_{S_{r'}} \overset{1}{\zeta}{}'\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{_0\varrho}\right) d\sigma' = h\, r^2 \mathfrak{s}(r) - \lambda \mathfrak{r}^2.$$

Wie wir wissen, hat die zu (149) gehörige homogene Integralgleichung drei linear unabhängige Nullösungen $\mathfrak{u}_1(\tau)$, $\mathfrak{u}_{11}(\tau)$, $\mathfrak{u}_{12}(\tau)$; die Lösungen der adjungierten Gleichung sind $\boldsymbol{\mathfrak{u}}_1(\tau)$, $\boldsymbol{\mathfrak{u}}_{11}(\tau)$, $\boldsymbol{\mathfrak{u}}_{12}(\tau)$. Die für die Lösbarkeit von (150) notwendigen und hinreichenden Bedingungen sind wegen

$$(151)\qquad \begin{aligned} &\int \mathfrak{r}^2 \boldsymbol{\mathfrak{u}}_1(\tau)\, d\tau = \int \mathfrak{r}^2 \boldsymbol{\mathfrak{u}}_{11}(\tau)\, d\tau = \int \mathfrak{r}^2 \boldsymbol{\mathfrak{u}}_{12}(\tau)\, d\tau = 0\,, \\ &\int r^2 \mathfrak{s}(r) \boldsymbol{\mathfrak{u}}_1(\tau)\, d\tau = \int r^2 \mathfrak{s}(r) \boldsymbol{\mathfrak{u}}_{11}\, d\tau = \int r^2 \mathfrak{s}(r) \boldsymbol{\mathfrak{u}}_{12}\, d\tau = 0 \end{aligned}$$

erfüllt. Durch die Forderung der Symmetrie ist $\overset{1}{\zeta}(\tau)$ als eine Lösung der Integralgleichung (149) vollkommen bestimmt.

Wie man leicht verifiziert, ist

$$(152)\qquad \mathfrak{r}^2 = \frac{2}{3} r^2 (1 - P_2(\cos\theta))\,,$$

unter $P_2(x)$ das Legendresche Polynom $\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, d.h. eine Kugelfunktion zweiter Ordnung verstanden. Den Entwicklungen in **18.** zufolge liegt es nahe, eine die Symmetrieforderungen erfüllende Lösung der Gleichung (149) in der Form

$$(153)\qquad \overset{1}{\zeta}(\tau) = \mathfrak{z}_0(r) + \mathfrak{z}_2(r) P_2(\cos\theta)$$

anzusetzen. Zur Bestimmung von $\mathfrak{z}_0(r)$ und $\mathfrak{z}_2(r)$ erhält man, wenn man wie in **18.** verfährt, die Integralgleichungen

$$(154)\qquad \begin{aligned} &\psi(r)\mathfrak{z}_0(r) - \int_0^\infty \mathfrak{z}_0'\, df(r') \int_{S_{r'}} \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) d\sigma' = h r^2 \mathfrak{s}(r) - \frac{2}{3}\lambda r^2, \\ &\psi(r) = \psi(\tau) = -\frac{4\pi}{r^2}\int_0^r f(r') r'^2\, dr'\,, \end{aligned}$$

$$(155)\qquad \begin{aligned} \psi(r)\mathfrak{z}_2(r) P_2(\cos\theta) - \int_0^\infty \mathfrak{z}_2'\, df(r') \int_{S_{r'}} \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) P_2(\cos\theta')\, d\sigma' \\ = \frac{2}{3}\lambda r^2 P_2(\cos\theta)\,. \end{aligned}$$

Es möge $\mathfrak{E}_0$ die Einheitskugel bezeichnen. Da

$$(156)\qquad \int_{\mathfrak{E}_0} P_2(\cos\theta)\, d\sigma = 0$$

gilt, so kann man für (155) auch schreiben

$$(157)\qquad \psi(r)\mathfrak{z}_2(r) P_2(\cos\theta) - \int_0^\infty \mathfrak{z}_2'\, df(r') \int_{S_{r'}} \frac{1}{\varrho} P_2(\cos\theta')\, d\sigma' = \frac{2}{3}\lambda r^2 P_2(\cos\theta)\,.$$

Setzt man speziell $h r^2 \mathfrak{s}(r) = \frac{2}{3}\lambda r^2$, so erhält man $\mathfrak{z}_0(r) \equiv 0$, da, wie wir schon früher gesehen haben (vgl. S. 117), die zu (154) gehörige homogene Integralgleichung keine von Null verschiedene Lösung hat. Die Glei-

chung (157) ergibt wiederum, wenn man die Formeln (109) beachtet, zur Bestimmung von $\mathfrak{z}_2(r)$ die Beziehung

$$(158)\qquad \psi(r)\,\mathfrak{z}_2(r) - \frac{4\pi}{5}\int_0^r \frac{r'^4}{r^3}\,\mathfrak{z}_2'\,d f(r') - \frac{4\pi}{5}\int_r^\infty \frac{r^2}{r'}\,\mathfrak{z}_2'\,d f(r') = \frac{2}{3}\lambda r^2,$$

wofür man nach einer einfachen Umformung auch

$$(159)\qquad \mathfrak{z}_2(r)\int_0^r f(r')\,r'^2\,dr' - \frac{1}{5r}\int_0^r f'\,d(r'^4\mathfrak{z}_2') - \frac{r^4}{5}\int_r^{\mathfrak{R}} f'\,d\left(\frac{1}{r'}\,\mathfrak{z}_2'\right) = -\frac{\lambda r^4}{6\pi}$$

schreiben kann. Dies ist die bekannte Gleichung, zu der Clairaut in seiner „Théorie de la figure de la terre“ gelangt ist[101].

Ist im Gegensatz zu der vorhin gemachten Annahme $h r^2 \mathfrak{s}(r) - \frac{2}{3}\lambda r^2$ nicht identisch gleich Null, so wird $\mathfrak{z}_0(r)$ von Null verschieden ausfallen. Man gelangt von der Clairautschen Näherung zu der ersten Approximation durch eine bestimmte kugelsymmetrische Transformation.

20. Schlußbemerkungen. Der Existenzbeweis vereinfacht sich wesentlich, wenn die Dichte sowohl der Ausgangs- als auch der gesuchten Gleichgewichtsfigur in einer Umgebung des Schwerpunktes einen konstanten Wert hat. Insbesondere könnte sowohl T als auch T_1 aus einer endlichen Anzahl Gebiete konstanter Dichte bestehen[102]. In der Tat fällt jetzt die umständliche Sonderbehandlung des singulären Punktes O fort.

Eine ebenfalls sehr einfache Behandlung gestattet der folgende Spezialfall, der eine interessante Interpretation zuläßt. Es sei $\overline{T}$ irgendeine aus einem einzigen Körper bestehende homogene Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit, und es möge Θ das von der Randfläche $\overline{S}$ von $\overline{T}$ und einer in dem Außengebiete von $\overline{T}$ gelegenen Niveaufläche des Gesamtpotentials, S, begrenztes Gebiet bezeichnen. Wir fassen $T = \overline{T} + \Theta$ als die Ausgangskonfiguration auf und nehmen demgemäß f in $\overline{T}$ gleich der Dichte der eben genannten Gleichgewichtsfigur, in Θ hingegen gleich Null, χ in $\overline{T}$ gleich Null, in

---

[101] Vgl. A. Liapounoff, loc. cit. [40] b) S. 1, Formel (1). A. a. O. bedeutet z das, was im Text mit $\frac{\mathfrak{z}_2}{r}$ bezeichnet wurde.

Man vergleiche in diesem Zusammenhang die wiederholt genannte bahnbrechende Arbeit von Liapounoff, loc. cit. [40] a), die Note von J. Lense, Über eine Integralgleichung in der Theorie der heterogenen Gleichgewichtsfiguren, Math. Zeitschr. **16** (1923), S. 296—300 sowie eine in Vorbereitung befindliche Abhandlung von E. Hölder; Zur Theorie inhomogener Gleichgewichtsfiguren. 2. Mitteilung. (Sie wird voraussichtlich in der Math. Zeitschr. erscheinen.)

[102] Vgl. die diesen Fall betreffenden, von der allgemeinen Theorie unabhängigen Andeutungen in meiner Schrift, Astronomie und Mathematik in ihrer Wechselwirkung, Leipzig 1923, S. 59—61.

Θ indessen von Null verschieden an[103] und setzen die Schwerkraft im Innern und auf dem Rande der Ausgangskonfiguration von Null verschieden und nach innen gerichtet voraus. Augenscheinlich ist S analytisch und regulär. Ist die Ausgangsfigur $\overline{T}$ regulär, so gehört zu jedem absolut hinreichend kleinen Werte des Koeffizienten α (vgl. S. 96) und zu jedem hinreichend kleinen Werte von $|\omega_1 - \omega|$, darum auch von $|\lambda|$ eine und nur eine Gleichgewichtsfigur $T_1 + S_1$. Man kann sie als die Gleichgewichtsfigur eines flüssigen, von einer dünnen, ebenfalls flüssigen, nicht notwendig homogenen Atmosphäre umgebenen Planeten ansehen[104]. Ist $\overline{T}$ eine Verzweigungsfigur, so erscheint die Diskussion einer Verzweigungsgleichung als notwendig. Selbst für $\omega_1 = \omega$ wäre es denkbar, daß sich dabei unter Umständen mehr als eine oder aber auch gar keine Gleichgewichtsfigur ergibt.

Was den Existenzbeweis, der sich, wie gesagt, diesmal nicht unwesentlich vereinfacht, betrifft, so bemerken wir, daß die Integro-Differentialgleichung (43) wegen $\frac{\partial f}{\partial \nu} = 0$ und $[f] = -f$ auf der Sprungfläche $\overline{S}$ nunmehr die Gestalt

$$(160) \quad \psi\zeta + \int_{\overline{S}} f' \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' = s - \alpha \int_{\Theta_1} \chi' \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1' - \lambda \mathfrak{r}^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa} \zeta^2 (a^2 + b^2)$$
$$- 2\lambda\zeta(ax + by) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{B}^{(2)} + \mathfrak{B}^{(3)} + \dots)$$

annimmt. Sie gilt für alle (x, y, z) in T, braucht aber nur für alle Punkte von $\Theta + \overline{S} + S$ in Betracht gezogen zu werden. Das Volumintegral rechter Hand ist über das Bildgebiet Θ_1 von Θ erstreckt zu denken; s ist eine beliebige, dem absoluten Betrage nach hinreichend kleine Funktion von $\mathfrak{r}$, die freilich nur für diejenigen Werte von $\mathfrak{r}$, die den Niveauflächen in Θ entsprechen, erklärt zu werden braucht. Wir haben rechts $\mathfrak{B}^{(2)} + \mathfrak{B}^{(3)} + \dots$, unter $\mathfrak{B}^{(n)}$ einen zu (53) III analogen, über $\overline{S}$ erstreckten Integralausdruck verstanden, für $\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \dots$ geschrieben, weil es sich diesmal, wie man leicht sieht, um die Glieder zweiter und höherer Ordnung des Ausdruckes $\int_{T_1} f' \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1' - \int_{\overline{T}} f' \frac{1}{\varrho} d\tau'$ handelt. Es ist indessen zu beachten, daß in dem Ausdruck für $\mathfrak{B}^{(n)}$ der Aufpunkt auf einer beliebigen Niveaufläche in Θ und nicht wie a. a. O. notwendigerweise auf $\overline{S}$ anzunehmen ist.

Die Auflösung der Integro-Differentialgleichung (160) durch sukzessive Approximationen bietet keine Schwierigkeiten dar. Man wird wie in **17.** beim Übergang von der $(n-1)$-ten zur n-ten Approximation zu-

[103] Übrigens könnte χ bei der Annäherung an S gegen Null konvergieren.

[104] Von den durch die Sonne verursachten Gezeiten wird dabei abgesehen.

nächst $\overset{(n)}{\zeta}$ auf $\overline{S}$ durch Auflösung einer linearen, nicht homogenen Integralgleichung bestimmen und hernach ausgehend von (160) ohne weiteres $\overset{(n)}{\zeta}$ in Θ entnehmen. Die Komplikationen, die a. a. O. durch die Einführung der Größen s_0 und h entstehen, fallen jetzt fort.

Übrigens gelten die Formeln, auch wenn die speziellen bezüglich der Symmetrieebenen von $\overline{T}$ in **15.** gemachten Voraussetzungen (dort ist T das, was jetzt $\overline{T}$ heißt) nicht erfüllt sind, z. B. für ringförmige homogene Gleichgewichtsfiguren (vgl. **22.**) als Ausgangsfiguren. Man gelangt so u. a. zu einem homogenen flüssigen Kreisringkörper mit einer dünnen flüssigen Atmosphäre. Ebenso kann man eine ringförmige Gleichgewichtsfigur mit einem Zentralkörper (vgl. **24.**) zum Ausgangspunkt wählen.

Die vorstehende Theorie läßt sich ohne Mühe auf den Fall ausdehnen, daß die Flüssigkeit sich in einem mitrotierenden analytischen und regulären Außenfeld, das die Symmetrieebenen von $T+S$ zu Symmetrieebenen hat, befindet. (Man vergleiche die homogene Flüssigkeiten betreffenden Ausführungen in **11.**) Es leuchtet weiter ein, daß sich die gesamte in diesem Kapitel entwickelte Theorie ohne Mühe auf den zweidimensionalen Fall sinngemäß übertragen läßt. Vor allem dürften schwach inhomogene Flüssigkeitszylinder in der Nachbarschaft homogener (regulärer) elliptischer Zylinderfiguren existieren. Als Gegenstück zu der nichthomogenen Gleichgewichtsfigur, zu der wir zuletzt in der Theorie der Figur der Erde gelangt sind, erscheint ein langsam rotierender, nichthomogener Ringkörper (vgl. **22.**), dessen Normalschnitt aus angenähert elliptischen, schwach abgeplatteten Schichten besteht. Als Ausgangsfigur erscheint dabei ein inhomogener ruhender Kreiszylinderkörper, der aus koaxialen Schichten von nach innen zu nicht abnehmender Dichte gebildet wird[105]. Dieser Körper gehört einem Arm von Gleichgewichtsfiguren an. Man erhält diese, indem man der Winkelgeschwindigkeit einen beliebigen positiven, unterhalb einer leicht angebbaren Schranke gelegenen Wert erteilt, die Flüssigkeitskonfiguration indessen ungeändert läßt, somit $\zeta\equiv 0$ annimmt. Von Interesse wäre die Feststellung, ob von dieser linearen Reihe für besondere Werte von ω weitere lineare Reihen abzweigen, insbesondere, ob dies in dem einfachsten Falle eines aus endlich vielen homogenen Schichten bestehenden Zylinders zutrifft.

---

[105] Für die Diskussion der zu (103) analogen homogenen Integralgleichung reicht diese Voraussetzung vollkommen aus. Für die Auflösung der maßgebenden Integro-Differentialgleichung in dem eben betrachteten Spezialfalle wie in der allgemeinen Theorie muß in unserer Behandlungsweise des weiteren angenommen werden, daß die Dichte $f(r)$ $(r^2 = x^2 + y^2)$ nur endlich viele Sprungflächen hat und die Funktion $f(r)$ in jedem Stetigkeitsbereiche stetige, einer H-Bedingung genügende Ableitungen hat. Wir nehmen des weiteren $\frac{df(0)}{dr} = 0$, somit $\frac{df(r)}{dr} = O(r^{\mu})$ $(0 < \mu < 1)$ an. (Vgl. S. 93.)

Fünftes Kapitel.

Gleichgewichtsfiguren in der Umgebung einer die Gleichgewichtsbedingungen nur angenähert erfüllenden Konfiguration.

21. Allgemeines. Die in dem dritten und vierten Kapitel entwickelte Theorie gestattet, in geeigneter Weise modifiziert, in manchen Fällen, wenn ein rotierender homogener Flüssigkeitskörper $\mathfrak{T}$, der auch aus mehreren Einzelmassen bestehen kann, bekannt ist, der in erster Näherung die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt, den Existenzbeweis einer exakten Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft von $\mathfrak{T}$ zu erbringen.

Wir wollen diese Behauptung etwas näher erläutern. Es sei eine von einem kleinen Parameter δ abhängige Schar von Flüssigkeitsverteilungen $\mathfrak{T}^{(\delta)}$, die um die z-Achse eines kartesischen Achsenkreuzes mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega(\delta)$ rotieren, und, wie vorhin erwähnt, die Gleichgewichtsbedingungen in einer ersten Näherung erfüllen, gegeben. Das Gesamtpotential (Potential der Gravitations- und Zentrifugalkräfte) von $\mathfrak{T}^{(\delta)}$ nimmt also auf seinem Rand $\mathfrak{S}^{(\delta)}$ Werte an, deren Schwankung mit δ verschwindet, genauer von der Ordnung δ ist. Es sei $T_1^{(\delta)}$ eine Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft erster Ordnung von $\mathfrak{T}^{(\delta)}$, deren Existenz vermutet wird, und die zu einem von ω wenig verschiedenen Wert ω_1 der Winkelgeschwindigkeit gehört.

Wir beziehen den Rand von $T_1^{(\delta)}$, er heiße $S_1^{(\delta)}$, auf den Rand $\mathfrak{S}^{(\delta)}$ von $\mathfrak{T}^{(\delta)}$ in ähnlicher Weise, wie wir s. Z. S_1 auf S bezogen hatten. Es seien schließlich $\mathfrak{U}_1^{(\delta)}$ und $\mathfrak{U}^{(\delta)}$ die Gesamtpotentiale der Körper $T_1^{(\delta)}$ und $\mathfrak{T}^{(\delta)}$ in korrespondierenden Punkten auf $S_1^{(\delta)}$ und $\mathfrak{S}^{(\delta)}$. Die Differenz $\mathfrak{U}_1^{(\delta)} - \mathfrak{U}^{(\delta)}$ läßt sich nun auf eine ganz ähnliche Form wie der Ausdruck $V_1 - V$ (vgl. S. 44) bringen. In der Tat ist s. Z. bei der Entwicklung des Ausdruckes $V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V(X, Y, Z)$ nirgends davon Gebrauch gemacht worden, daß T_1 und T, in der Bezeichnungsweise des dritten Kapitels, Gleichgewichtsfiguren sind. Berücksichtigt man, daß das Gesamtpotential $\mathfrak{U}_1^{(\delta)}$ auf $S_1^{(\delta)}$ konstant ist, so erhält man zur Bestimmung von ζ eine zu (75) III analoge Integro-Differentialgleichung, in der rechter Hand neben s und λ, als ein weiterer kleiner Parameter, δ auftritt. Er trägt dem Umstande Rechnung, daß $\mathfrak{T}^{(\delta)}$ die bekannten Gleichgewichtsbedingungen nur näherungsweise erfüllt, so daß $\mathfrak{U}^{(\delta)}$ auf $\mathfrak{S}^{(\delta)}$ eine als gegeben anzusehende Ortsfunktion $\mathfrak{F}(\xi, \eta, \delta) = O(\delta)$ darstellt. Für hinreichend kleine Werte von $|s|$, $|\lambda|$ und $|\delta|$ wird man durch Auflösung der vorhin genannten Integro-Differentialgleichung, allgemein zu reden, in der Tat zu einer Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft von $\mathfrak{T}^{(\delta)}$ gelangen. All dies gilt auch, wenn, wie es häufig vorkommen wird,

ein Außenfeld vorliegt. Natürlich geben die vorstehenden Ausführungen nur das Prinzip der Methode wieder. In konkreten Fällen wird man sich nicht selten veranlaßt sehen, in den Einzelheiten allerhand Abweichungen vorzunehmen.

Einige Beispiele. Betrachten wir einen Kreisringkörper $\mathfrak{T}^{(\delta)}$, dessen Meridiankreis den Halbmesser $\mathfrak{R}$, der Leitkreis aber den Halbmesser L hat. Für kleine Werte des Quotienten $\delta = \frac{\mathfrak{R}}{L}$ stellt unser Kreisringkörper bei festgehaltenem $\mathfrak{R}$, somit für große Werte von L angenähert eine Gleichgewichtsfigur einer ruhenden homogenen Flüssigkeit dar. Es läßt sich zeigen, daß für kleine δ und für passend gewählte kleine Werte der Winkelgeschwindigkeit eine homogene Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft von $\mathfrak{T}^{(\delta)}$ existiert (ringförmige Gleichgewichtsfigur ohne Zentralkörper [vgl. **22.**]).

Ein um einen festgehaltenen punktförmigen Zentralkörper in großer Entfernung rotierender Kugelkörper $\mathfrak{T}^{(\delta)}$ vom vorgegebenen Halbmesser $\mathfrak{R}$, dessen Winkelgeschwindigkeit ω dem Keplerschen Gesetz entspricht, stellt in einer ersten Näherung eine Gleichgewichtsfigur einer rotierenden homogenen Flüssigkeit dar. In der Umgebung von $\mathfrak{T}^{(\delta)}$ liegt eine im Felde des Zentralkörpers rotierende exakte Gleichgewichtsfigur $T_1^{(\delta)}$ eines entfernten homogenen flüssigen Mondes (vgl. **25.**). Ihre Winkelgeschwindigkeit ω_1 ist von ω nur wenig verschieden. Als δ gilt hier der Quotient $\frac{\mathfrak{R}}{L}$, unter L den Abstand des Mittelpunktes des Kugelkörpers $\mathfrak{T}^{(\delta)}$ von dem Zentralkörper verstanden.

Die eben betrachtete Gleichgewichtsfigur bildet ein entferntes Glied einer linearen Reihe homogener Gleichgewichtsfiguren, die sämtlich um einen ruhenden punktförmigen Zentralkörper rotieren. Sie werden von den sogenannten Rocheschen Ellipsoiden, die den Gleichgewichtsbedingungen nur angenähert genügen, ausgehend konstruiert (vgl. **24.**). Ein Gegenstück hierzu bildet eine lineare Reihe homogener ringförmiger Gleichgewichtsfiguren mit Zentralkörper (S. 149). Weitere Beispiele:

1. Es gibt bekanntlich eine Anzahl spezieller Lösungen des ebenen n-Körperproblems ($n \geqq 2$), bei denen die n Massenpunkte Kreisbahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt beschreiben und die ganze Konfiguration wie ein starres Gebilde mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert. Werden die Massenpunkte durch im Verhältnis zu ihrer gegenseitigen Entfernung kleine, gleich schwere, homogene flüssige Kugeln ersetzt, so erhält man in einer ersten Näherung eine Gleichgewichtskonfiguration. Die Halbmesser der einzelnen Körper gelten hierbei als gegeben, ihren gegenseitigen Entfernungen sind hinreichend große Werte zu erteilen. In einer Umgebung der betrachteten Konfiguration liegt eine aus n Einzelmassen bestehende exakte Gleichgewichtsfigur (Doppel- und Mehrfachsternsysteme S. 155). Insbesondere

kann es sich um n Massenpunkte in den Eckpunkten eines regulären n-Ecks oder auf einer Geraden handeln. In dem zuerst genannten Falle kann auch noch in dem Schwerpunkte ein Massenpunkt angenommen werden, so daß man insgesamt zu $n+1$ Einzelkörpern gelangt, von denen n flüssig sind, der letzte hingegen flüssig oder fest sein kann. Das etwaige feste Attraktionszentrum wird als punktförmig oder aus homogenen konzentrischen Kugelschichten bestehend vorausgesetzt.

2. Von der linearen Reihe der Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Rocheschen Ellipsoide, von denen vorhin die Rede war, ausgehend, kommt man zu einer linearen Reihe von Gleichgewichtsfiguren, die aus zwei oder mehr kongruenten, in bezug auf den Zentralkörper symmetrisch gelegenen angenähert ellipsoidischen Körpern bestehen. Den hinreichend weit entfernten Gliedern der Reihe kann man noch einen oder mehrere in dem Raume zwischen dem Satelliten und dem Zentralkörper gelegene flüssige Kreisringkörper hinzufügen. Der Zentralkörper kann wie übrigens schon bei den Rocheschen Ellipsoiden, als flüssig und in diesem Falle mitrotierend gedacht werden.

3. Systeme von zwei oder mehr konzentrischen mit verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten oder wie ein starrer Körper rotierenden Ringen (S. 142ff.).

4. Man denke sich in den Gitterpunkten eines unendlichen regulären linearen, zwei- oder dreidimensionalen Netzes gleiche punktartige Massen angebracht. Das Ganze befindet sich, wie man fast unmittelbar sieht, im Ruhezustande im labilen Gleichgewicht. Für kleine Werte des Verhältnisses Durchmesser/Abstand zweier Gitterpunkte gibt es nun, wie man ohne ernstliche Schwierigkeiten zeigen kann, einen von der Kugel wenig verschiedenen Flüssigkeitskörper, der in allen Punkten des Gitters angebracht, eine (instabile) aus unendlich vielen kongruenten Einzelmassen bestehende Gleichgewichtsfigur einer ruhenden Flüssigkeit ergibt.

Es sei daran erinnert, daß in allen Fällen, auch wenn dies in der vorstehenden kurzen Übersicht nicht ausdrücklich erwähnt ist, das eine oder das andere Bestimmungsstück des Systems einen hinreichend kleinen Wert hat. Es handelt sich eben bei den Betrachtungen dieses und der beiden vorhergehenden Kapitel durchaus um die Existenzbeweise im kleinen.

Im vorstehenden war durchweg von homogenen Flüssigkeiten die Rede. Die zur Verfügung stehenden Hilfsmittel dürften erlauben, in manchen Fällen diese Voraussetzung fallen zu lassen.

Es liegt auf der Hand, daß die eingangs erläuterte Methode, sinngemäß modifiziert, auch in dem zweidimensionalen Falle beiderseits unbegrenzter Flüssigkeitszylinder zu einem Existenzbeweis einer Reihe neuer Gleichgewichtsfiguren führen wird. Manchen dieser Gleichgewichtsfiguren entspricht, beiläufig bemerkt, „dual“ eine permanente ebene

Wirbelbewegung einer den Gesamtraum erfüllenden homogenen, inkompressiblen Flüssigkeit[106].

Wir schließen diese recht unvollständige Aufstellung[107] und gehen zu den Ausführungen im einzelnen über.

22. Ringförmige Gleichgewichtsfigur einer homogenen Flüssigkeit ohne Zentralkörper. Wir beginnen mit dem besonders instruktiven Beispiel einer homogenen ringförmigen Gleichgewichtsfigur ohne Zentralkörper, deren Existenz von Thomson und Tait postuliert worden ist, und die später Frau S. Kowalewski und auf einem anderen Wege Poincaré unter Zugrundelegung von Näherungsrechnungen behandelt hatten[108]. Wir werden in dem Folgenden sehen, wie sich in einem konkreten Falle die Bestimmung der von δ abhängigen Glieder der fundamentalen Integro-Differentialgleichung des Problems gestaltet, und zugleich das sehr wichtige Prinzip der Einführung geeigneter zusätzlicher Parameter, von dem in der vorstehenden Einleitung noch nicht die Rede sein konnte, kennen lernen. Vor allem einige Hilfsbetrachtungen.

In der Ebene $z = z_0$ eines kartesischen Koordinatensystems x, y, z sei ein mit Masse der Liniendichte 1 belegter Kreis vom Halbmesser l um den Punkt $(0, 0, z_0)$ gegeben. Sein Newtonsches Potential im Punkte $(x, 0, z)$ ist (vgl. loc. cit. [108] S. 101—108):

$$(1) \qquad \begin{gathered} \mathfrak{B} = 2\log\frac{8l}{d} + \mathfrak{P}_1\left(\frac{x-l}{l}, \frac{z-z_0}{l}\right)\log\frac{8l}{d} + \mathfrak{P}_2\left(\frac{x-l}{l}, \frac{z-z_0}{l}\right), \\ \mathfrak{P}_1(0,0) = \mathfrak{P}_2(0,0) = 0, \quad d^2 = (x-l)^2 + (z-z_0)^2. \end{gathered}$$

Die Funktionen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ sind für alle hinreichend kleinen Werte von $\left|\frac{x-l}{l}\right|$ und $\left|\frac{z-z_0}{l}\right|$ analytisch und regulär.

Betrachten wir weiter eine Ebene $\mathfrak{E}$ und in dieser ein kartesisches Koordinatensystem $\mathfrak{x}, \mathfrak{z}$. Es sei $\mathfrak{K}$ eine Kreisfläche vom Radius R [109] in $\mathfrak{E}$, deren Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist. Die Ebene $\mathfrak{E}$ sei

---

[106] Die fraglichen Bewegungen sind in der Regel auf ein in bestimmter Weise bewegtes Achsenkreuz bezogen zu denken. Vgl. meine Grundlagen der Hydromechanik, Berlin 1928, wo sich auf S. 450ff. einige Beispiele für die im Text erwähnte Korrespondenz näher angegeben finden.

[107] Es sei in diesem Zusammenhang auf die sehr wichtigen, im Text unerwähnt gebliebenen Betrachtungen der Nummern **27.**, **28.**, **29.** besonders hingewiesen.

[108] Frau Kowalewski hatte sich im Anschluß an Laplace und in Verbesserung der von ihm gewonnenen Näherungswerte allgemeiner mit einer ringförmigen Gleichgewichtsfigur mit Zentralkörper beschäftigt. Vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Dritte Abhandlung. Ringförmige Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper. Math. Zeitschr. **13** (1922), S. 82—118. Dort finden sich auf S. 83—85 nähere Literaturangaben.

[109] Der Buchstabe R bezeichnete im dritten Kapitel den Abstand der Randpunkte einer Gleichgewichtsfigur von der Rotationsachse. Auch erhalten sonst manche Buchstaben eine von der bisherigen abweichende Bedeutung. Die Gefahr einer Verwechslung liegt indessen nirgends vor.

zugleich die Ebene $y=0$ eines räumlichen Koordinatensystems x, y, z. das so gewählt ist, daß in $\mathfrak{E}$

$$x=L+\mathfrak{x}, \quad z=\mathfrak{z} \tag{2}$$

gilt. Läßt man $\mathfrak{K}$ um die z-Achse rotieren, so erhält man einen Kreisringkörper T. Es sei S die Oberfläche von T und Σ die Peripherie der Kreisfläche $\mathfrak{K}$. Das Newtonsche Potential $\mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$ von T, das wir uns vorübergehend mit Masse der Dichte 1 erfüllt denken, in dem Punkte $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$ auf Σ läßt sich in der Form

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) = \mathfrak{Q}_1\left(\frac{\mathfrak{X}}{L}, \frac{\mathfrak{Z}}{L}\right)\log\frac{8L}{R} + \mathfrak{Q}_2\left(\frac{\mathfrak{X}}{L}, \frac{\mathfrak{Z}}{L}\right), \quad \mathfrak{Q}_2(0, 0)=0 \tag{3}$$

darstellen, unter $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ Potenzreihen verstanden, die für hinreichend kleine Werte von $\left|\frac{\mathfrak{X}}{L}\right|$ und $\left|\frac{\mathfrak{Z}}{L}\right|$ konvergieren.

Schreibt man

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) = \mathfrak{Q}_1\left(\frac{R}{L}\cos\psi, \frac{R}{L}\sin\psi\right)\log\frac{8L}{R} + \mathfrak{Q}_2\left(\frac{R}{L}\cos\psi, \frac{R}{L}\sin\psi\right) \tag{4}$$

$$\left(\cos\psi = \frac{\mathfrak{X}}{R}, \quad \sin\psi = \frac{\mathfrak{Z}}{R}\right),$$

so sieht man unmittelbar, daß man $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ bei festgehaltenem ψ auch als Funktionen des Parameters $\frac{R}{L}$ auffassen kann, die für hinreichend kleine Werte von $\left|\frac{R}{L}\right|$, etwa

$$\left|\frac{R}{L}\right| \leqq h_0, \tag{5}$$

analytisch und regulär sind. Es gilt, nach $\frac{R}{L}$ geordnet,

$$\begin{aligned}\mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) = {} & 2\pi R^2 \log\frac{8L}{R} - \frac{\mathfrak{X}}{L}\pi R^2 \log\frac{8L}{R} + \frac{5}{4}\frac{\mathfrak{X}}{L}\pi R^2 \\ & + \pi R^2 \frac{R^2}{L^2}\left(\frac{3}{4}\frac{\mathfrak{X}^2}{R^2} - \frac{1}{4}\right)\log\frac{8L}{R} + O\left(\frac{R^2}{L^2}\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Es gilt ferner

$$\left\{\begin{aligned} & \mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\psi, \\ & \frac{B_0}{2} = \pi R^2\left(2 + \frac{R^2}{8L^2}\right)\log\frac{8L}{R} + w_0, \quad w_0 = O\left(\frac{R^2}{L^2}\right), \\ & B_1 = -\pi R^2 \frac{R}{L}\left(\log\frac{8L}{R} - \frac{5}{4}\right) + w_1, \quad w_1 = O\left(\frac{R^2}{L^2}\right), \\ & B_2 = \frac{3}{8}\pi R^2 \frac{R^2}{L^2}\log\frac{8L}{R} + w_2, \qquad w_2 = O\left(\frac{R^2}{L^2}\right), \\ & B_n = O\left(\frac{R^2}{L^2}\right). \qquad\qquad (n>2).\end{aligned}\right. \tag{7}$$

Offenbar sind alle B_n von der Form

$$(8)\qquad B_n = B_n' \log\frac{8L}{R} + B_n'',$$

unter B_n und B_n'' Funktionen des Parameters $\frac{R}{L}$ verstanden, die für $\left|\frac{R}{L}\right| \leqq h_0$ analytisch und regulär sind.

Wir schreiben

$$(9)\qquad \mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) = \frac{B_0}{2} + B_1 \cos\psi + B_2 \cos 2\psi + \mathfrak{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}).$$

Natürlich kann auch

$$(10)\qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}' \log\frac{8L}{R} + \mathfrak{B}''$$

gesetzt werden, unter $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}''$ Funktionen von $\frac{R}{L}$ verstanden, die für $\left|\frac{R}{L}\right| \leqq h_0$ analytisch und regulär sind. Es gilt

$$(11)\qquad \begin{gathered} \mathfrak{B}' = O\left(\frac{R^3}{L^3}\right), \quad \frac{d\mathfrak{B}'}{ds} = O\left(\frac{R^3}{L^3}\right), \quad \mathfrak{B}'' = O\left(\frac{R^2}{L^2}\right), \quad \frac{d\mathfrak{B}''}{ds} = O\left(\frac{R^2}{L^2}\right), \\ s = R\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right). \end{gathered}$$

Es sei nunmehr S_1 eine Rotationsfläche um die z-Achse in der Nachbarschaft erster Ordnung von S (Abb. 3). Der von S_1 begrenzte Körper heiße T_1. In engster Analogie zu den Entwicklungen des dritten Kapitels (S. 41 ff.) denken wir uns die Lage der Punkte auf S auf ein geeignetes System Gaußscher Parameter ξ und η bezogen. Es sei $P(\xi, \eta)$ irgendein Punkt auf S, und es möge (ν) die nach außen gerichtete Normale zu S in P bezeichnen.
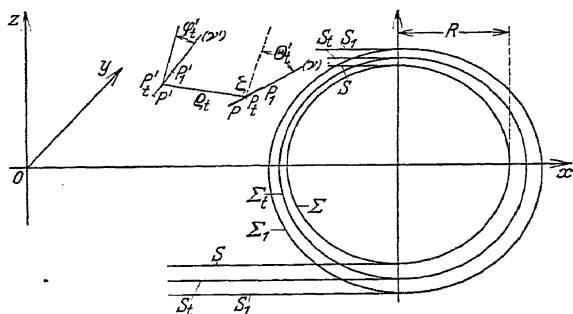
Abb. 3.

Ist, wie wir annehmen wollen, der Höchstwert des Abstandes eines Punktes auf S_1 von S hinreichend klein, so trifft (ν) die Fläche S_1 nur in einem Punkte P_1. Wir bezeichnen PP_1, positiv nach außen gerechnet, mit ζ und fassen wie früher ξ, η und ζ^* als krummlinige Koordinaten der Punkte in einer Umgebung von S auf. Insbesondere sind die krummlinigen Koordinaten von P und P_1 entsprechend $\xi, \eta, 0$ und ξ, η, ζ. Für die Differenz der Gravitationspotentiale $\varkappa V_1(\xi, \eta)$ und $\varkappa V(\xi, \eta)$ der Körper T_1 und T, die wir uns nunmehr mit einer homogenen Flüssigkeit der Dichte f erfüllt denken, in P_1 bzw. P ergibt sich die zu den Formeln des dritten Kapitels (vgl. insb. (37) III) ganz

analoge Formel

$$(12)\qquad \varkappa(V_1(\xi,\eta)-V(\xi,\eta))=\varkappa\int\limits_0^1\frac{\partial V_t}{\partial t}\,dt,$$

$$(13)\qquad \frac{\partial V_t}{\partial t}=\int\limits_{S_t}\frac{f'}{\varrho_t}(\zeta'\cos\varphi_t'-\zeta\cos\theta_t')\,d\sigma_t'.$$

Da T_1 ein Rotationskörper ist, so genügt es, V_1 für die Punkte P_1 des in der Ebene $y=0$ gelegenen Meridianschnittes Σ_1 von S_1 zu bestimmen. Es seien Σ und Σ_t die Schnittlinien der Ebene $y=0$ und der Flächen S und S_t. Wir wählen als Parameter ξ,η die Bogenlänge s des Kreises Σ, von dem Punkte $\mathfrak{X}=0$, $\mathfrak{Z}=R$ ab, im Sinne der Uhrzeigerbewegung gemessen, und den Azimutwinkel χ. Der Ebene $y=0$ entspricht der Wert $\chi=0$. Die Koordinaten der Punkte P und P' sind demnach jetzt

$$P\colon\ \xi=s,\ \eta=0;\ \zeta=0,\qquad P'\colon\ \xi'=s',\ \eta'=\chi';\ \zeta'=0.$$

Es sei $\overline{P}_t'$ der Punkt auf Σ_t, der in P_t' übergeht, wenn T_t um die z-Achse durch den Winkel χ' gedreht wird (Abb. 4). Offenbar hat $\overline{P}_t'$ die Koordinaten
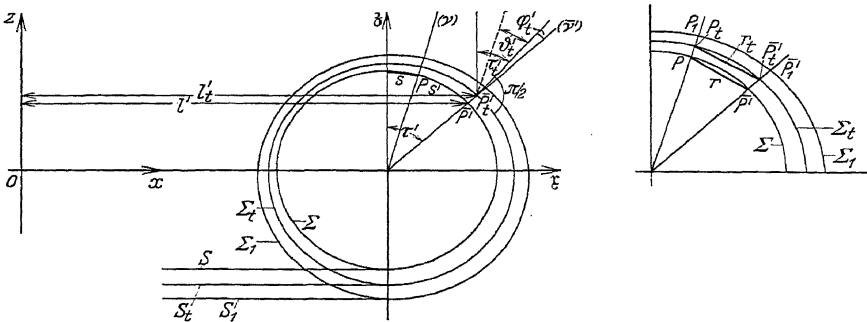
Abb. 4.

$s', 0; t\zeta'$. Sein Abstand von der z-Achse heiße l_t'. Ebenso sollen l und l_t die Abstände der Punkte P und P_t von der z-Achse bezeichnen. Analog ist $\overline{P}'(s', 0; 0)$ der Punkt, der bei der vorerwähnten Drehung in $P'(s', \chi'; 0)$ übergeht. Seinen Abstand von der z-Achse bezeichnen wir mit l'. Wir bezeichnen ferner den Winkel, den die Außennormale in $\overline{P}_t'$ an S_t mit der z-Achse einschließt, mit τ_t'. Für $t=0$ geht τ_t' in $\tau'=\frac{s'}{R}$ über. Es sei endlich ϑ_t' der Winkel, den die vorerwähnte Normale mit der Normale (ν) in P an S bildet. Für $\chi'=0$ geht θ_t' in ϑ_t' über. Wir bemerken endlich, daß die Normalen durch $\overline{P}_t'$ an Σ_t und Σ denselben Winkel φ_t' einschließen, den die Normalen an S_t und S durch P_t' bilden. Wie man

sich leicht überzeugt, ist

$$(14)\quad \cos\theta_t' = \cos\tau_t'\cos\frac{s}{R} + \sin\tau_t'\cos\chi'\sin\frac{s}{R}$$
$$= \cos\tau_t'\cos\frac{s}{R} + \sin\tau_t'\sin\frac{s}{R} + \sin\tau_t'\sin\frac{s}{R}(\cos\chi' - 1)$$
$$= \cos\left(\tau_t' - \frac{s}{R}\right) - 2\sin\tau_t'\sin\frac{s}{R}\sin^2\frac{\chi'}{2} = \cos\vartheta_t' - 2\sin\tau_t'\sin\frac{s}{R}\sin^2\frac{\chi'}{2}$$

und darum wegen (13)

$$(15)\quad \frac{1}{f}\frac{\partial V_t}{\partial t} = \int\limits_{S_t}\frac{1}{\varrho_t}(\zeta'\cos\varphi_t' - \zeta\cos\vartheta_t')\,d\sigma' + 2\zeta\sin\frac{s}{R}\int\limits_{S_t}\sin\tau_t'\sin^2\frac{\chi'}{2}\frac{d\sigma_t'}{\varrho_t}$$
$$= \Delta_1 + \Delta_2.$$

Es sei r_t der Abstand der Punkte $P_t(s, 0; t\zeta)$ und $\overline{P}_t'(s', 0; t\zeta')$ auf Σ_t. Für $t = 0$ geht r_t in r, den Abstand der Punkte $P(s, 0; 0)$ und $\overline{P}'(s', 0; 0)$ über. Nach (15) und (1) ist, wenn man die kartesischen Koordinaten der Punkte P_t und $\overline{P}_t'$ entsprechend mit $\mathfrak{x}_t, \mathfrak{z}_t$ und $\mathfrak{x}_t', \mathfrak{z}_t'$ bezeichnet,

$$(16)\quad \Delta_1 = \int\limits_{\Sigma_t}(\zeta'\cos\varphi_t' - \zeta\cos\vartheta_t')\left\{2\log\frac{8l_t'}{r_t} + \log\frac{8l_t'}{r_t}\,\mathfrak{P}_1\left(\frac{\mathfrak{x}_t - \mathfrak{x}_t'}{l_t'}, \frac{\mathfrak{z}_t - \mathfrak{z}_t'}{l_t'}\right)\right.$$
$$\left. + \mathfrak{P}_2\left(\frac{\mathfrak{x}_t - \mathfrak{x}_t'}{l_t'}, \frac{\mathfrak{z}_t - \mathfrak{z}_t'}{l_t'}\right)\right\} ds_t',$$

wofür man nach einer leichten Umrechnung auch setzen kann

$$(17)\quad \Delta_1 = 2\int\limits_{\Sigma_t}(\zeta'\cos\varphi_t' - \zeta\cos\vartheta_t')\log\frac{8L}{r_t}\,ds_t'$$
$$+ \int\limits_{\Sigma_t}(\zeta'\cos\varphi_t' - \zeta\cos\vartheta_t')\left[\mathfrak{P}_1\left(\frac{\mathfrak{x}_t - \mathfrak{x}_t'}{l_t'}, \frac{\mathfrak{z}_t - \mathfrak{z}_t'}{l_t'}\right)\log\frac{8l_t'}{r_t}\right.$$
$$\left. + \mathfrak{P}_2\left(\frac{\mathfrak{x}_t - \mathfrak{x}_t'}{l_t'}, \frac{\mathfrak{z}_t - \mathfrak{z}_t'}{l_t'}\right) + 2\log\frac{l_t'}{L}\right] ds_t' = \Delta_3 + \Delta_4.$$

Es gilt nun weiter

$$(18)\quad \Delta_3 = 2\int\limits_{\Sigma_t}(\zeta'\cos\varphi_t' - \zeta\cos\vartheta_t')\log\frac{R}{r_t}\,ds_t' + 2\log\frac{8L}{R}\int\limits_{\Sigma_t}(\zeta'\cos\varphi_t' - \zeta\cos\vartheta_t')\,ds_t'$$
$$= \Delta_3' + \Delta_3'',$$

$$(19)\quad \int\limits_{\Sigma_t}\zeta\cos\vartheta_t'\,ds_t' = \zeta\int\limits_{\Sigma_t}\cos\vartheta_t'\,ds_t' = 0, \text{ somit}$$

$$(20)\quad \int\limits_0^1 \Delta_3''\,dt = 2\log\frac{8L}{R}\int\limits_0^1 dt\int\limits_{\Sigma_t}\zeta'\cos\varphi_t'\,ds_t' = 2\,\Theta^*\log\frac{8L}{R},$$

unter Θ^* den Flächeninhalt des von Σ und Σ_1 begrenzten Flächenstücks verstanden.

Wegen (12), (15), (17), (18) und (20) ist also

$$(21)\quad \frac{1}{f}[V_1(\xi,\eta)-V(\xi,\eta)]=\int_0^1 \Delta_3' dt+\int_0^1 \Delta_3'' dt+\int_0^1 \Delta_4 dt+\int_0^1 \Delta_2 dt$$

$$=2\int_0^1 dt\int_{\Sigma_t}(\zeta'\cos\varphi_t'-\zeta\cos\vartheta_t')\log\frac{R}{r_t}ds_t'+2\Theta^*\log\frac{8L}{R}$$

$$+\int_0^1 dt\int_{\Sigma_t}(\zeta'\cos\varphi_t'-\zeta\cos\vartheta_t')\left\{\mathfrak{P}_1\left(\frac{\mathfrak{x}_t-\mathfrak{x}_t'}{l_t'},\frac{\mathfrak{z}_t-\mathfrak{z}_t'}{l_t'}\right)\log\frac{8l_t'}{r_t}\right.$$

$$\left.+\mathfrak{P}_2\left(\frac{\mathfrak{x}_t-\mathfrak{x}_t'}{l_t'},\frac{\mathfrak{z}_t-\mathfrak{z}_t'}{l_t'}\right)+2\log\frac{l_t'}{L}\right\}ds_t'+2\zeta\sin\frac{s}{R}\int_0^1 dt\int_{S_t}\sin\tau_t'\sin^2\frac{\chi'}{2}\frac{d\sigma_t'}{\varrho_t}.$$

Der Ausdruck $\int_0^1 \Delta_3' dt$ läßt sich für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen reellen oder komplexen Werte von ζ und $\frac{d\zeta}{ds}$, etwa $|\zeta|$, $\left|\frac{d\zeta}{ds}\right|<\varepsilon$, in eine unbedingt und gleichmäßig konvergierende unendliche Reihe von der Form

$$(22)\qquad \int_0^1 \Delta_3' dt=\mathfrak{B}^{(1)}+\mathfrak{B}^{(2)}+\mathfrak{B}^{(3)}+\ldots,$$

$$(23)\qquad \mathfrak{B}^{(n)}=\frac{2}{n!}\int_{\Sigma}\left\{\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[(\zeta'\cos\varphi_t'-\zeta\cos\vartheta_t')\log\frac{R}{r_t}\frac{ds_t'}{ds'}\right]\right\}_{t=0}ds'$$

und insbesondere

$$(24)\qquad \mathfrak{B}^{(1)}=-2\pi R\zeta+2\int_{\Sigma}\zeta'\log\frac{R}{r}\,ds'$$

entwickeln. Übrigens ist sogar die Reihe $|\mathfrak{B}^{(1)}|+|\mathfrak{B}^{(2)}|+|\mathfrak{B}^{(3)}|+\ldots$ gleichmäßig konvergent. Der Beweis wäre ganz wie in **7.** zu führen. Wie dort läßt sich weiter zeigen, daß, wenn wir

$$(25)\qquad \mathfrak{B}^{(2)}+\mathfrak{B}^{(3)}+\ldots=\Psi^{(1)}\{\zeta\},\qquad |\zeta|,\ \left|\frac{d\zeta}{ds}\right|\leqq\Omega\leqq\varepsilon$$

setzen, sich

$$(26)\qquad |\Psi^{(1)}|,\ \left|\frac{d\Psi^{(1)}}{ds}\right|<\alpha_1\Omega^2$$

ergibt.

Es sei $\dot{\zeta}$ eine andere nebst ihrer Ableitung stetige Funktion auf Σ, die den Ungleichheiten

$$(27)\qquad |\dot{\zeta}|,\ \left|\frac{d\dot{\zeta}}{ds}\right|\leqq\Omega,\qquad |\zeta-\dot{\zeta}|,\ \left|\frac{d\zeta}{ds}-\frac{d\dot{\zeta}}{ds}\right|\leqq\mho$$

genügt. Es gilt dann

$$(28)\qquad |\Psi^{(1)}\{\zeta\}-\Psi^{(1)}\{\dot{\zeta}\}|,\ \left|\frac{d}{ds}\Psi^{(1)}\{\zeta\}-\frac{d}{ds}\Psi^{(1)}\{\dot{\zeta}\}\right|\leqq\alpha_2\Omega\mho.$$

Und wiederum läßt sich diese Ungleichheit ganz wie die analoge Ungleichheit im dritten Kapitel beweisen.

Was jetzt den Ausdruck $\int_0^1 \Delta_4 dt$ betrifft, so kann man diesen für alle hinreichend kleinen Werte von $|\zeta|$, $\left|\frac{d\zeta}{ds}\right|$ und $\frac{R}{L}$, etwa $\Omega \leqq \varepsilon_1 \leqq \varepsilon$, $\left|\frac{R}{L}\right| \leqq h_1 \leqq h_0$ in eine unbedingt und gleichmäßig konvergierende Reihe

$$\int_0^1 \Delta_4 dt = \mathfrak{V}_*^{(1)} + \mathfrak{V}_*^{(2)} + \ldots \tag{29}$$

entwickeln; $\mathfrak{V}_*^{(n)}$ ist wie $\mathfrak{V}^{(n)}$ ein Integralausdruck n-ten Grades über $\zeta, \zeta', \frac{d\zeta'}{ds'}$. Es gilt ferner

$$\mathfrak{V}_*^{(n)} = \mathfrak{L}_1^{(n)} \log \frac{8L}{R} + \mathfrak{L}_2^{(n)}, \tag{30}$$

wo $\mathfrak{L}_1^{(n)}$ und $\mathfrak{L}_2^{(n)}$ im Gebiete $\left|\frac{R}{L}\right| \leqq h_1$ analytische und reguläre Funktionen des Parameters $\frac{R}{L}$ bezeichnen. Übrigens konvergieren auch die beiden Reihen $\Sigma |\mathfrak{L}_1^{(n)}|$ und $\Sigma |\mathfrak{L}_2^{(n)}|$ gleichmäßig. Setzt man

$$\mathfrak{V}_*^{(1)} + \mathfrak{V}_*^{(2)} + \ldots = \Psi^{(2)}\{\zeta\}, \tag{31}$$

so findet man

$$|\Psi^{(2)}|, \quad \left|\frac{d}{ds}\Psi^{(2)}\right| < \alpha_3 \Omega \left|\frac{R}{L} \log \frac{8L}{R}\right|, \tag{32}$$

$$|\Psi^{(2)}\{\zeta\} - \Psi^{(2)}\{\dot{\zeta}\}|, \quad \left|\frac{d}{ds}\Psi^{(2)}\{\zeta\} - \frac{d}{ds}\Psi^{(2)}\{\dot{\zeta}\}\right| < \alpha_4 \overline{\sigma} \left|\frac{R}{L} \log \frac{8L}{R}\right|. \tag{33}$$

Der Beweis all dieser Beziehungen erfordert einige Rechnungen und findet sich loc. cit. [108] S. 111—114 in allen Einzelheiten durchgeführt.

Was nun endlich den Ausdruck $\int_0^1 \Delta_2 dt$ betrifft, so gilt hier die für

$$\Omega \leqq \varepsilon_2 \leqq \varepsilon_1 \leqq \varepsilon, \quad \left|\frac{R}{L}\right| \leqq h_2 \leqq h_1 \leqq h_0 \tag{34}$$

unbedingt und gleichmäßig konvergierende Entwicklung

$$\int_0^1 \Delta_2 dt = {}_*\mathfrak{V}^{(1)} + {}_*\mathfrak{V}^{(2)} + \ldots, \tag{35}$$

unter ${}_*\mathfrak{V}^{(n)}$ wieder einen Integraldruck n-ten Grades über $\zeta, \zeta', \frac{d\zeta'}{ds'}$ verstanden. Es gilt ferner

$$ {}_*\mathfrak{V}^{(n)} = \mathfrak{D}_1^{(n)} \log \frac{8L}{R} + \mathfrak{D}_2^{(n)}. \tag{36}$$

Hier sind $\mathfrak{D}_1^{(n)}, \mathfrak{D}_2^{(n)}$ gewisse Funktionen des Parameters $\frac{R}{L}$, die sich im Gebiete (34) analytisch und regulär verhalten. Die unendlichen Reihen $\Sigma |\mathfrak{D}_1^{(n)}|$, $\Sigma |\mathfrak{D}_2^{(n)}|$ konvergieren gleichmäßig. Setzt man zur Vereinfachung

$$ {}_*\mathfrak{V}^{(1)} + {}_*\mathfrak{V}^{(2)} + \ldots = \Psi^{(3)}\{\zeta\}, \tag{37}$$

so findet man

$$(38)\qquad |\Psi^{(3)}\{\zeta\}|,\quad \left|\frac{d}{ds}\Psi^{(3)}\{\zeta\}\right| < \alpha_5 \Omega \left|\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}\right|,$$

sowie

$$(39)\quad |\Psi^{(3)}\{\zeta\} - \Psi^{(3)}\{\dot{\zeta}\}|,\quad \left|\frac{d}{ds}\Psi^{(3)}\{\zeta\} - \frac{d}{ds}\Psi^{(3)}\{\dot{\zeta}\}\right| < \alpha_6 \mho \left|\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}\right|.$$

Wir fassen jetzt die Ergebnisse der bisherigen Betrachtungen zusammen. Aus (21), (22), (29) und (35) folgt, wenn man

$$(40)\qquad \mathfrak{V}^{(n)} + \mathfrak{V}_*^{(n)} + {}_*\mathfrak{V}^{(n)} = V_*^{(n)} \qquad (n > 1)$$

setzt,

$$(41)\quad \frac{1}{f}(V_1(\xi,\eta) - V(\xi,\eta)) = -2\pi R\zeta + 2\int_{\Sigma}\zeta' \log\frac{R}{r}\,ds' + 2\Theta^*\log\frac{8L}{R}$$
$$+ \mathfrak{V}_*^{(1)} + {}_*\mathfrak{V}^{(1)} + V_*^{(2)} + V_*^{(3)} + \dots .$$

Die unendliche Reihe rechter Hand konvergiert für

$$(42)\qquad \Omega \leqq \varepsilon_2,\quad \left|\frac{R}{L}\right| \leqq h_2$$

unbedingt und gleichmäßig. Jedes Glied der Reihe kann in der Form

$$(43)\qquad V_*^{(n)} = \mathfrak{E}_1^{(n)}\log\frac{8L}{R} + \mathfrak{E}_2^{(n)} \qquad (n \geqq 2)$$

dargestellt werden, unter $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ Funktionen von $\frac{R}{L}$ verstanden, die in (42) analytisch und regulär sind.

Setzt man

$$(44)\qquad \mathfrak{V}_*^{(1)} + {}_*\mathfrak{V}^{(1)} + V_*^{(2)} + V_*^{(3)} + \dots = \Psi_*\{\zeta\},$$

so gilt

$$(45)\qquad |\Psi_*|,\quad \left|\frac{d}{ds}\Psi_*\right| < \alpha_7\left(\Omega^2 + \Omega\left|\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}\right|\right),$$

$$(46)\quad |\Psi_*\{\zeta\} - \Psi_*\{\dot{\zeta}\}|,\quad \left|\frac{d}{ds}\Psi_*\{\zeta\} - \frac{d}{ds}\Psi_*\{\dot{\zeta}\}\right| < \alpha_8\mho\left(\Omega + \left|\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}\right|\right).$$

Aus (4), (9) und (7) folgt jetzt (vgl. loc. cit. [108] S. 114—118) [110]

$$\mathfrak{W}_1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1) = \frac{B_0}{2} + B_1\cos\psi + B_2\cos 2\psi + \mathfrak{V}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) - 2\pi R\zeta$$
$$+ 2\int_{\Sigma}\zeta'\log\frac{R}{r}\,ds' + 2\Theta^*\log\frac{8L}{R} + \mathfrak{V}_*^{(1)} + {}_*\mathfrak{V}^{(1)} + V_*^{(2)} + V_*^{(3)} + \dots,$$

---

[110] Wir schreiben, wenn $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}\left(1 + \frac{\zeta}{R}\right)$, $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}\left(1 + \frac{\zeta}{R}\right)$ die Koordinaten des Punktes P_1 auf Σ_1 bezeichnen, für $\frac{1}{f}V_1(\xi,\eta)$ auch $\mathfrak{W}_1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1)$. Man beachte ferner, daß $\frac{1}{f}V(\xi,\eta) = \mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$ gilt.

$$(47)\quad \begin{aligned} \frac{B_0}{2} &= \pi R^2\left(2+\frac{R^2}{8L^2}\right)\log\frac{8L}{R}+\mathfrak{w}_0 && \left(\mathfrak{w}_0=O\left(\frac{R^2}{L^2}\right)\right),\\ B_1 &= -\pi R^2\frac{R}{L}\left(\log\frac{8L}{R}-\frac{5}{4}\right)+\mathfrak{w}_1 && \left(\mathfrak{w}_1=O\left(\frac{R^2}{L^2}\right)\right),\\ B_2 &= \frac{3}{8}\pi R^2\frac{R^2}{L^2}\log\frac{8L}{R}+\mathfrak{w}_2 && \left(\mathfrak{w}_2=O\left(\frac{R^2}{L^2}\right)\right),\\ B_n &= O\left(\frac{R^2}{L^2}\right) && (n>2). \end{aligned}$$

Das Potential der Zentrifugalkraft im Punkte

$$(48)\qquad \mathfrak{X}_1=\mathfrak{X}\left(1+\frac{\zeta}{R}\right),\qquad \mathfrak{Z}_1=\mathfrak{Z}\left(1+\frac{\zeta}{R}\right)$$

auf Σ_1 ist, wenn die Winkelgeschwindigkeit mit ω bezeichnet wird,

$$(49)\qquad V_1^c(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{Z}_1)=\frac{\omega^2}{2}\left(L^2+2L\mathfrak{X}+2L\mathfrak{X}\frac{\zeta}{R}+\mathfrak{X}^2\left(1+\frac{\zeta}{R}\right)^2\right).$$

Die Gleichgewichtsbedingung lautet nun

$$(50)\qquad \mathfrak{W}_1(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{Z}_1)+\frac{1}{\varkappa f}V_1^c(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{Z}_1)+c^*=0\qquad (c^*\text{ konstant})$$

oder, anders geschrieben,

$$(51)\quad \begin{aligned} 2\pi R\zeta-2\int_\Sigma\zeta'\log\frac{R}{r}\,ds' &= c^*+\frac{B_0}{2}+B_1\cos\psi+B_2\cos 2\psi\\ &+\mathfrak{V}(\mathfrak{X},\mathfrak{Z})+2\Theta^*\log\frac{8L}{R}+\frac{\omega^2}{2\varkappa f}\left(L^2+2L\mathfrak{X}+2L\mathfrak{X}\frac{\zeta}{R}+\mathfrak{X}^2\left(1+\frac{\zeta}{R}\right)^2\right)\\ &+\mathfrak{V}_*^{(1)}+{}_*\mathfrak{V}^{(1)}+V_*^{(2)}+V_*^{(3)}+\dots. \end{aligned}$$

Auf die Integralgleichung

$$(52)\qquad \zeta-\frac{1}{\pi R}\int_\Sigma\zeta'\log\frac{R}{r}\,ds'=0$$

wird man geführt, wenn man in der Umgebung einer ruhenden, beiderseits unbegrenzten zylindrischen Gleichgewichtsfigur einer homogenen Flüssigkeit eine um die Zylinderachse langsam rotierende, ebenfalls zylindrische Gleichgewichtsfigur unter sinngemäßer Benutzung der in **14.** skizzierten allgemeinen Theorie zu bestimmen sucht. Die Integralgleichung (52) hat zwei linear unabhängige Nullösungen

$$(53)\quad u^{(1)}=\frac{\sin\psi}{\sqrt{\pi R}},\quad u^{(2)}=\frac{\cos\psi}{\sqrt{\pi R}};\quad \int_\Sigma(u^{(1)})^2ds=\int_\Sigma(u^{(2)})^2ds=1,\quad \int_\Sigma u^{(1)}u^{(2)}ds=0.$$

Wir setzen

$$(54)\qquad \frac{1}{\pi R}\log\frac{R}{r}=u^{(1)}u^{(1)\prime}+u^{(2)}u^{(2)\prime}+N(s,s')$$

und erhalten

$$(55)\quad \zeta-\frac{1}{\pi R}\int_\Sigma\zeta'\log\frac{R}{r}\,ds'=\zeta-u^{(1)}\int_\Sigma u^{(1)\prime}\zeta'\,ds'-u^{(2)}\int_\Sigma u^{(2)\prime}\zeta'\,ds'-\int_\Sigma N\zeta'\,ds'.$$

Der Kern N hat keine Nullösungen mehr. Denkt man sich T_1 so orientiert, daß die, wie wir wissen, stets vorhandene, auf der Rotationsachse normale Symmetrieebene sich mit der Ebene $z=0$ deckt, so wird $\int\limits_{\Sigma} u^{(1)\prime} \zeta' ds' = 0$ sein.

Wir werden jetzt ω und c^* so bestimmen, daß auch $\int\limits_{\Sigma} u^{(2)\prime} \zeta' ds' = 0$ wird. Dadurch wird eine unter Umständen recht umständliche Diskussion einer Verzweigungsgleichung vermieden. Wir setzen, um dies alles zu erreichen, *unter w einen noch zu bestimmenden Parameter verstanden,*

$$\frac{\omega^2}{\varkappa f} L - \pi R \frac{R}{L}\left(\log \frac{8L}{R} - \frac{5}{4}\right) + \frac{\boldsymbol{w}_1}{R} - \frac{w}{R} = 0. \tag{56}$$

Dadurch werden diejenigen Terme in (51) rechts, die $\cos\psi$ als Faktor enthalten und von ζ unabhängig sind, zu $w \cos\psi$ zusammengefaßt. Wie sich alsbald zeigen wird, gelingt es auf die einfachste Weise, w so zu bestimmen, daß in der Tat $\int\limits_{\Sigma} u^{(2)\prime} \zeta' ds' = 0$ gilt. Aus (56) folgt

$$\frac{\omega^2}{\varkappa f} = \pi \frac{R^2}{L^2}\left(\log \frac{8L}{R} - \frac{5}{4}\right) - \frac{\boldsymbol{w}_1}{RL} + \frac{w}{RL}. \tag{57}$$

Des weiteren setzen wir

$$c^* + 2\Theta^* \log \frac{8L}{R} + \pi R^2 \left(2 + \frac{1}{8}\frac{R^2}{L^2}\right) \log \frac{8L}{R} + \boldsymbol{w}_0 + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}\left(L^2 + \frac{R^2}{2}\right) = c, \tag{58}$$

unter c einen hinreichend kleinen festen Wert verstanden, und finden nach einer leichten Umformung

$$2\pi R\zeta - 2\pi R \int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{N}\zeta' ds' = c + w \cos\psi + \left(B_2 + \frac{\omega^2 R^2}{4\varkappa f}\right)\cos 2\psi \tag{59}$$

$$+ \mathfrak{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}\left(2L\mathfrak{X}\frac{\zeta}{R} + 2\mathfrak{X}^2\frac{\zeta}{R} + \mathfrak{X}^2\frac{\zeta^2}{R^2}\right) + \mathfrak{B}_*^{(1)} + {}_*\mathfrak{B}^{(1)} + V_*^{(2)} + V_*^{(3)} + \cdots.$$

Dabei ist

$$B_2 + \frac{\omega^2 R^2}{4\varkappa f} = \frac{5\pi R^2}{8}\frac{R^2}{L^2}\left(\log \frac{8L}{R} - \frac{1}{2}\right) + \boldsymbol{w}_2 - \frac{\boldsymbol{w}_1 R}{4L} + \frac{wR}{4L}. \tag{60}$$

Der Parameter w ist in (59) rechts, wenn man von dem Ausdruck $w\cos\psi$ absieht, nur noch in dem dritten Summanden und in den mit $\frac{\omega^2}{2\varkappa f}$ behafteten Gliedern vertreten; er ist, wie man sich leicht überzeugt, entsprechend mit den kleinen Größen $\frac{R}{L}$, ζ, $\frac{R}{L}\zeta$ und $\frac{R}{L}\zeta^2$ multipliziert. Die rechte Seite von (59) ist eine Funktion der Parameter c, w, $w' = \frac{R}{L}$, $w'' = \frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}$, die sich für alle hinreichend kleinen Werte von $|c|$, $|w|$, $|w'|$, $|w''|$ analytisch und regulär verhält. Wie in **9.** läßt sich zeigen, daß (59) für jeden Wertequadrupel c, w, w', w'' in

einem Gebiete

$$(61)\qquad |c|,\ |w|,\ |w'|,\ |w''| \leqq h_3 \leqq h_2$$

eine und nur eine Lösung hat. Diese Lösung kann durch sukzessive Näherungen gewonnen und nach Potenzen von c, w, w', w'' entwickelt werden. Sie ist in bezug auf die Ebene $z=0$ symmetrisch. Für das Gelingen des Verfahrens ist das Bestehen gewisser Ungleichheiten entscheidend. Sie ergeben sich aus den Beziehungen (10), (11), (45) und (46). Wir bezeichnen vorübergehend die rechte Seite von (59) mit $\Pi\{\zeta\}$ und nehmen

$$(62)\qquad |c|,\ |w|,\ |w'|,\ |w''| \leqq \Omega_1$$

an. Alsdann ist, wie sich ohne große Mühe zeigen läßt,

$$(63)\qquad |\Pi\{\zeta\}|,\ \left|\frac{d}{ds}\Pi\{\zeta\}\right| \leqq \alpha_9(\Omega_1 + \Omega_1\Omega + \Omega^2),$$

$$(64)\qquad |\Pi\{\zeta\} - \Pi\{\dot\zeta\}|,\ \left|\frac{d}{ds}\Pi\{\zeta\} - \frac{d}{ds}\Pi\{\dot\zeta\}\right| < \alpha_{10}(\Omega_1 + \Omega)\,\overline{\sigma}.$$

Diese Beziehungen sind zu den Ungleichheiten (124) III, (128) III, (130) III, die dem Konvergenzbeweis im dritten Kapitel zugrunde liegen, ganz analog.

Es ist nicht schwer, die ersten Glieder der Entwicklung von ζ zu bestimmen. Man findet

$$(65)\qquad \zeta = \frac{c}{2\pi R} + \frac{w}{2\pi R}\cos\psi + \frac{1}{\pi R}\,\frac{5\pi R^2}{8}\,\frac{R^2}{L^2}\log\frac{8L}{R}\cos 2\psi + \mathfrak{P}(c, w, w', w'').$$

In $\mathfrak{P}$ sind die von w freien Glieder von der Ordnung $\frac{R^2}{L^2}$, die Glieder von der Form $g(s)\,w$ fehlen ganz.

Setzt man jetzt in die Beziehung $\int_\Sigma u^{(2)'}\zeta' ds' = 0$ für ζ den Ausdruck (65) ein, so findet man eine Gleichung von der Form

$$(66)\qquad \frac{1}{2\sqrt{\pi R}}\,w + \mathfrak{p}(c, w, w', w'') = 0,$$

aus der sich

$$(67)\qquad w = O\left(\frac{R^2}{L^2}\right)$$

ergibt. Demnach ist

$$(68)\qquad \zeta = \frac{c}{2\pi R} + \frac{5}{8}R\,\frac{R^2}{L^2}\log\frac{8L}{R}\cos 2\psi + O\left(\frac{R^2}{L^2}\right)$$

und nach (57) mit Rücksicht auf (7) und (67)

$$(69)\qquad \frac{\omega^2}{\varkappa f} = \pi\frac{R^2}{L^2}\left(\log\frac{8L}{R} - \frac{5}{4}\right) + O\left(\frac{R^3}{L^3}\right).$$

Da ζ in bezug auf die Ebene $z=0$ symmetrisch ist, so ist die Beziehung $\int_\Sigma u^{(1)'}\zeta' ds' = 0$ erfüllt. Wegen $\int u^{(1)'}\zeta' ds' = 0$ und $\int u^{(2)'}\zeta' ds' = 0$

genügt der Wert (68) für ζ der Integro-Differentialgleichung (51). Aus (58) findet man beiläufig den Wert der Konstanten c^*. *Der Körper* T_1 *ist eine ringförmige Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit.*

Die in (68) noch verfügbare Konstante c kann mit Leichtigkeit so bestimmt werden, daß das Volumen von T_1 einen vorgeschriebenen Wert in der Umgebung des Volumens von T erhält. Die den Meridianschnitt von T_1 berandende Kurve Σ_1 ist näherungsweise eine Ellipse, deren große Achse nach der Rotationsachse hin gerichtet ist. Die Abplattung hat den Wert $\frac{5}{4}\frac{R^2}{L^2}\log\frac{8L}{R}$.[111]

Die Einführung eines frei verfügbaren Parameters, die sich im vorstehenden als hervorragend nützlich erwies, wird auch späterhin, wie wir sehen werden, in manchen Fällen gute Dienste leisten. Oft gelangt man hierbei zum Ziele, indem man in der Ausgangskonfiguration, auf die man die gesuchte Gleichgewichtsfigur bezieht, ein geeignetes Bestimmungsstück ganz oder teilweise unbestimmt läßt[112]. Schon Liapounoff hatte sich dieses Hilfsmittels bedient, indem er bei dem Existenzbeweis neuer Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Ellipsoide als „Bezugskörper" gelegentlich ein Jacobisches oder Maclaurinsches Ellipsoid wählte, dessen Achsenlängen von einem Parameter abhingen. Von wesentlicher Bedeutung erscheint dieser Gedanke in der Liapounoffschen Theorie der Instabilität der sogenannten „birnenförmigen" Gleichgewichtsfigur[113]. Zur Elimination einer Verzweigungsgleichung ist von mir ein Hilfsparameter zuerst in der in der Fußnote [122] genannten Arbeit herangezogen worden.

23. Gleichgewichtsfiguren, die aus zwei oder mehr koaxialen Ringen bestehen. Im Anschluß an die vorstehenden Betrachtungen wollen wir in aller Kürze zeigen, wie man zu Gleichgewichtsfiguren, die aus zwei oder auch mehr koaxialen Ringkörpern bestehen, kommt[114].

Jenseits des Körpers T_1 und wie dieser zu der Ebene $z=0$ symmetrisch denken wir uns einen weiteren kreisringkörperartigen Körper $\dot{T}_1$ und bezeichnen alle auf ihn bezüglichen Größen sinngemäß mit einem oben angebrachten Punkt. Vorhin ist $\frac{R}{L}$ als klein vorausgesetzt

[111] Vgl. loc. cit. [108], S. 100. Die a. a. O. angegebenen Werte der Koordinate ζ und der Abplattung sind infolge eines Rechenfehlers nur bis auf einen multiplikativen Faktor richtig.

[112] Man vergleiche die Leipziger Dissertation von E. Kähler, Über die Existenz von Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, die sich aus gewissen Lösungen des n-Körperproblems ableiten, Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 220—237.

[113] Vgl. A. Liapounoff, Problème de minimum dans une question de stabilité des figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation. Mémoires de l'académie des sciences de St-Pétersbourg (8) **22** (1908), S. 1—140.

[114] Auf Gleichgewichtsfiguren dieser Art hatte bereits Poincaré hingewiesen. Vgl. Bull. astr. **2** (1885), S. 109 und 404.

worden, — demgemäß soll auch $\frac{\dot{R}}{\dot{L}}$ einen kleinen Wert haben. Darüber hinaus wird ferner angenommen, daß auch $\frac{L}{\dot{L}}$ hinreichend klein ist, demnach die Ringe „weit auseinander liegen". Setzt man

$$\bar{h} = \mathrm{Max}\left(\frac{L}{\dot{L}}, \frac{\dot{R}}{\dot{L}}, \frac{R}{L}\right), \tag{70}$$

so findet man an Hand der in **22.** angegebenen Formeln für das Gravitationspotential des Körpers $\dot{T}_1$ im Punkte $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1)$ den Wert $\varkappa f(2\pi^2\dot{R}^2 + 2\pi\dot{\Theta}^* + O(\bar{h}^2))$, für dasjenige des Körpers T in $(\dot{\mathfrak{X}}_1, \dot{\mathfrak{Z}}_1)$ dagegen den Wert $\varkappa f\left(2\pi^2 R^2 \frac{L}{\dot{L}} + 2\pi\Theta^* \frac{L}{\dot{L}} + O(\bar{h}^2)\right)$. Die Integro-Differentialgleichung, die zum Ausdruck bringt, daß das Gesamtpotential auf S_1 einen festen Wert hat, entsteht aus (51), indem rechter Hand zwei weitere konstante Glieder sowie Terme von mindestens zweiter Ordnung hinzukommen. Eine ganz analoge Beziehung erhält man, indem man von $\dot{T}_1$ statt von T_1 ausgeht. Die Auflösung der beiden Integro-Differentialgleichungen durch sukzessive Approximationen bietet nach dem Vorstehenden nicht die geringsten Schwierigkeiten dar. Man wird diesmal zwei Parameter w und $\dot{w}$ einführen und erhält

$$\frac{\omega^2}{\varkappa f} = \pi \frac{R^2}{L^2} \log \frac{8L}{R} + O(\bar{h}^2), \qquad \frac{\dot{\omega}^2}{\varkappa \dot{f}} = \pi \frac{\dot{R}^2}{\dot{L}^2} \log \frac{8\dot{L}}{\dot{R}} + O(\bar{h}^2). \tag{71}$$

Soll das Ganze wie ein starrer Körper rotieren, so muß, wenn überdies $f = \dot{f}$ ist, in einer ersten Näherung $\frac{R}{L} = \frac{\dot{R}}{\dot{L}}$ sein. Eine Ausdehnung dieser Resultate auf ein System von drei und mehr Ringen ist naheliegend[115].

Vorhin ist $\frac{L}{\dot{L}}$ als klein vorausgesetzt worden. Garten und Maruhn geben in der soeben zitierten gemeinsamen Arbeit noch ein anderes System von Voraussetzungen, das die Existenz einer Gesamtheit von zwei um eine gemeinsame Achse rotierenden Ringkörpern gewährleistet. Es genügt, $\frac{\dot{L} - L}{L}$ und $\frac{\tilde{R}}{\dot{L} - L}$ $(\tilde{R} = \mathrm{Max}(R, \dot{R}))$ als hinreichend klein anzunehmen. Jetzt liegen die Ringe (im Verhältnis zu den Radien ihrer Leitkreise) „nahe beieinander", gleichzeitig sind die Durchmesser ihrer Meridianschnitte klein gegenüber dem Abstand der beiden Leitkreise, die Ringkörper sind als „dünn" anzusprechen (vgl. loc. cit. [115] S. 155—159).

---

[115] Vgl. die Abhandlung von V. Garten und K. Maruhn, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Eine aus zwei getrennten Ringkörpern bestehende Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit, Math. Zeitschr. **35** (1932), S. 154—160.

24. Rochesche Satelliten[116]. In dem Ursprung O_0 eines kartesischen Achsenkreuzes (x_0, y_0, z_0) möge sich eine punktförmige Masse M befinden. Das Attraktionszentrum kann auch als ein homogener oder aus konzentrischen Schichten gleicher Dichte bestehender hinreichend kleiner Kugelkörper mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt angenommen werden. Der Punkt $O = (L, 0, 0)$ sei der Ursprung eines neuen, durch die Beziehungen $x_0 = x + L$, $y_0 = y$, $z_0 = z$ mit dem früheren verknüpften rechtwinkligen Koordinatensystems (x, y, z) und zugleich Mittelpunkt des Ellipsoidkörpers T

$$(72)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1 \qquad (a > b > c).$$

Es sei P ein auf dem Rande S von T gelegener Punkt mit den Koordinaten X, Y, Z. Die Richtungskosinus der Außennormale (ν) zu S in P haben die Werte

$$(73)\qquad a = \frac{X}{a^2}p, \quad b = \frac{Y}{b^2}p, \quad c = \frac{Z}{c^2}p, \quad p = \left[\frac{X^2}{a^4} + \frac{Y^2}{b^4} + \frac{Z^2}{c^4}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Wir denken uns jetzt T mit einer homogenen, gravitierenden Flüssigkeit der Dichte f erfüllt und nebst den beiden Achsenkreuzen wie ein starres System um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierend. Wie Roche als erster zeigte[117], befindet sich das System, bestehend aus der im Ursprung des Achsenkreuzes (x_0, y_0, z_0) festgehalten gedachten Masse M und dem Ellipsoidkörper T für geeignete Werte der Winkelgeschwindigkeit und der Achsenverhältnisse angenähert im Zustande eines relativen Gleichgewichtes, sofern L groß und darum (bei *festgehaltenem* a) $h = \frac{a}{L}$ hinreichend klein angenommen wird. Dies besagt folgendes: Es sei mit $\varkappa V(x, y, z)$ das Gravitationspotential von T, $\varkappa G_M(x, y, z)$ dasjenige von M bezeichnet, und es möge, unter (X, Y, Z) wie vorhin einen beliebigen Punkt auf S verstanden,

$$(74)\qquad V(X, Y, Z) + \frac{\omega^2}{2\varkappa}[(L+X)^2 + Y^2] + G_M(X, Y, Z) = \Phi(X, Y, Z)$$

gesetzt werden. Alsdann ist bei passender Wahl von ω, unter $\mathfrak{s}$ eine geeignete Konstante verstanden,

$$(75)\qquad \Phi(X, Y, Z) - f\mathfrak{s}$$

---

[116] Vgl. die Leipziger Inaugural-Dissertation von V. Garten, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Rochesche Satelliten und ringförmige Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten mit Zentralkörper, Math. Zeitschr. **35** (1932), S. 684—745.

[117] Vgl. É. Roche, Mémoire sur la figure d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné. Mémoires de l'Académie de Montpellier (Section des Sciences) **1849**, **1850**, **1851**, **1**, S. **243** ff. und **333** ff., **2**, S. **21** ff. Vgl. weiter G. Tisserand, Traité de mécanique céleste, Paris 1891, Band 2, S. 110—115 sowie K. Schwarzschild, Die Poincarésche Theorie des Gleichgewichtes einer homogenen rotierenden Flüssigkeitsmasse. Dissertation München 1896.

eine auf S erklärte, mit h gegen Null konvergierende Korrektionsfunktion. Augenscheinlich besagt die Gleichung (74), daß man T im strengen Sinne als eine Figur relativen Gleichgewichtes bei Vorhandensein eines Außenfeldes $\varkappa G_M(x, y, z) - \varkappa \Theta(x, y, z) = \varkappa G(x, y, z)$ auffassen kann, sofern nur auf S die Beziehung $\Theta(X, Y, Z) = \Phi(X, Y, Z) - f\mathfrak{s}$ gilt. Bekanntlich ist (vgl. **3.**)

$$(76)\quad \frac{1}{f} V(X, Y, Z) = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A} X^2 - \boldsymbol{B} Y^2 - \boldsymbol{C} Z^2$$
$$= \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{c}^2 + \left(\boldsymbol{C}\frac{\boldsymbol{c}^2}{\boldsymbol{a}^2} - \boldsymbol{A}\right) X^2 + \left(\boldsymbol{C}\frac{\boldsymbol{c}^2}{\boldsymbol{b}^2} - \boldsymbol{B}\right) Y^2$$

wegen

$$(77)\quad \frac{X^2}{\boldsymbol{a}^2} + \frac{Y^2}{\boldsymbol{b}^2} + \frac{Z^2}{\boldsymbol{c}^2} = 1.$$

Ferner ist für hinreichend kleine Werte von h, etwa $h \leq h^*$, in einer Umgebung von S

$$(78)\quad \begin{aligned} G_M(x, y, z) &= M\left[(L + x)^2 + y^2 + z^2\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{M}{2L^3}\left[2L^2 - 2xL + 2x^2 - y^2 - z^2\right] + \Theta(x, y, z), \\ &= G(x, y, z) + \Theta(x, y, z), \\ \Theta(x, y, z) &= \frac{M}{L} O\left(\frac{r^3}{L^3}\right) \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2), \end{aligned}$$

somit wegen (77)

$$(79)\quad \begin{aligned} G_M(X, Y, Z) &= \frac{M}{2L^3}\left[2L^2 - \boldsymbol{c}^2 - 2XL + \left(2 + \frac{\boldsymbol{c}^2}{\boldsymbol{a}^2}\right)X^2 + \left(\frac{\boldsymbol{c}^2}{\boldsymbol{b}^2} - 1\right)Y^2\right] \\ &\quad + \Theta(X, Y, Z), \qquad \Theta(X, Y, Z) = \frac{M}{L} O(h^3). \end{aligned}$$

Wie wir sogleich sehen werden, kann man $\omega, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ so bestimmen, daß $\Theta(X, Y, Z) = \Phi(X, Y, Z) - f\mathfrak{s}$ wird. Die Beziehung (74) liefert in der Tat, wie man leicht sieht,

$$(80)\quad \begin{aligned} &\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{c}^2 + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}L^2 + \frac{M}{2fL^3}(2L^2 - \boldsymbol{c}^2) + \left[\frac{\omega^2}{\varkappa f}L - \frac{M}{fL^2}\right]X \\ &+ \left[\boldsymbol{C}\frac{\boldsymbol{c}^2}{\boldsymbol{a}^2} - \boldsymbol{A} + \frac{\omega^2}{2\varkappa f} + \frac{M}{2fL^3}\left(2 + \frac{\boldsymbol{c}^2}{\boldsymbol{a}^2}\right)\right]X^2 + \left[\boldsymbol{C}\frac{\boldsymbol{c}^2}{\boldsymbol{b}^2} - \boldsymbol{B} + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}\right. \\ &\left. + \frac{M}{2fL^3}\left(\frac{\boldsymbol{c}^2}{\boldsymbol{b}^2} - 1\right)\right]Y^2 + \frac{1}{f}\Theta(X, Y, Z) = \frac{1}{f}\Phi(X, Y, Z). \end{aligned}$$

Setzt man jetzt der Reihe nach

$$(81)\quad \begin{aligned} &\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{c}^2 + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}L^2 + \frac{M}{2fL^3}(2L^2 - \boldsymbol{c}^2) = \mathfrak{s}, \qquad \frac{\omega^2}{\varkappa f} = \frac{M}{fL^3}, \\ &\boldsymbol{C}\frac{\boldsymbol{c}^2}{\boldsymbol{a}^2} - \boldsymbol{A} + \frac{\omega^2}{2\varkappa f} + \frac{M}{2fL^3}\left(2 + \frac{\boldsymbol{c}^2}{\boldsymbol{a}^2}\right) = 0, \\ &\boldsymbol{C}\frac{\boldsymbol{c}^2}{\boldsymbol{b}^2} - \boldsymbol{B} + \frac{\omega^2}{2\varkappa f} + \frac{M}{2fL^3}\left(\frac{\boldsymbol{c}^2}{\boldsymbol{b}^2} - 1\right) = 0, \end{aligned}$$

so findet man

$$(82)\quad \frac{1}{f}\Phi(X,Y,Z)-\mathfrak{s}=\frac{1}{f}\Theta(X,Y,Z)=\frac{M}{L}O(h^3)=\frac{\omega^2}{\varkappa}L^2O(h^3)=O(h).$$

Augenscheinlich wird $\frac{1}{f}\Phi(X,Y,Z)-\mathfrak{s}$ mit $\frac{1}{L}$ zugleich beliebig klein.

Die transzendenten Gleichungen (81), in denen $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ die in **3.** angegebenen Werte haben, reichen bei vorgeschriebenem Volumen gerade aus, um $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$, $\mathfrak{s}$ und ω zu bestimmen[118]. Eine nähere Diskussion führt zu den folgenden Ergebnissen. Es gibt einen Wert $\mathring{\omega}$, so daß zu jedem $\omega<\mathring{\omega}$ zwei dreiachsige Ellipsoide, ein schwächer abgeplattetes $\bar{S}$ und ein stärker abgeplattetes $\overset{+}{S}$ gehören. Für $\omega\to\mathring{\omega}$ konvergieren $\bar{S}$ und $\overset{+}{S}$ gegen das einzige zu $\mathring{\omega}$ gehörige Ellipsoid $\mathring{S}$. Bei festgehaltenem Volumen schließen sich $\bar{S}$ und $\overset{+}{S}$ zu je einem regulären Arm von angenäherten Gleichgewichtsfiguren zusammen, die in $\mathring{S}$ miteinander zusammenhängen. Für $\omega\to 0$ konvergiert $\bar{S}$ gegen eine Kugel, $\overset{+}{S}$ gegen eine nach M hin gerichtete unendlich dünne Nadel. Mit monoton wachsendem ω nimmt die Abplattung $\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}$ der Ellipsoide $\bar{S}$ zu, diejenige von $\overset{+}{S}$ hingegen ab.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, festzustellen, ob es für hinreichend kleine Werte von h in der Umgebung von T einen Flüssigkeitskörper T_1 gibt, der für geeignete, von ω wenig verschiedene Werte ω_1 der Winkelgeschwindigkeit, sich im Felde

$$(83)\qquad \varkappa G_M(x,y,z)=\varkappa G(x,y,z)+\varkappa\Theta(x,y,z)$$

des Zentralkörpers M im relativen Gleichgewicht befindet. In zweiter Linie wäre zu untersuchen, ob es unter den Gleichgewichtsfiguren, deren Existenz wir vermuten, welche gibt, von denen lineare Reihen neuer reeller Gleichgewichtsfiguren abzweigen. Das zuerst genannte Problem gehört als ein spezieller Fall zu der am Schluß der Nummer **11.** betrachteten Klasse von Problemen. Das a. a. O. mit $\varkappa\hat{s}\hat{G}(x,y,z,\hat{s})=\varkappa\hat{s}\hat{\Gamma}$ bezeichnete Zusatzfeld hat jetzt den Wert $\varkappa\Theta(x,y,z)$. Demnach gilt jetzt in unveränderter Benutzung der in **11.** gebrauchten Bezeichnungen die Integro-Differentialgleichung

$$\psi\zeta+\int_S\frac{f'}{\varrho}\zeta' d\sigma'=s-R^2\lambda-\frac{\omega^2}{2\varkappa}(a^2+b^2)\zeta^2-2R\tau\lambda\zeta-(a^2+b^2)\lambda\zeta^2$$
$$-\frac{1}{\varkappa}(V^{(2)}+V^{(3)}+\ldots)-\frac{1}{2}\zeta^2\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\nu^2}-\hat{s}\hat{\Gamma}-\hat{s}\zeta\frac{\partial\hat{\Gamma}}{\partial\nu}-\hat{s}\frac{\zeta^2}{1\cdot 2}\frac{\partial^2\hat{\Gamma}}{\partial\nu^2}-\ldots,$$

$$R^2=(L+X)^2+Y^2,\quad \lambda=\frac{\omega_1^2-\omega^2}{2\varkappa},\quad G(x,y,z)=\Gamma(\xi,\eta,\zeta^*)\ \text{(vgl. S. 76)},$$

[118] Wegen der Einzelheiten vgl. bsp. G. Tisserand, Traité de Mécanique céleste. Paris 1891. Bd. II, S. 110—113.

wofür wir auch kürzer

$$(84)\quad \psi\zeta + \int\limits_S \frac{f'}{\varrho}\zeta' d\sigma' = s - R^2\lambda - \frac{\omega^2}{2\varkappa}(a^2+b^2)\zeta^2 - 2R\tau\lambda\zeta - (a^2+b^2)\lambda\zeta^2$$
$$- \frac{1}{\varkappa}(V^{(2)} + V^{(3)} + \ldots) - \frac{1}{2}\zeta^2\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\nu^2} - \ldots - \Theta(X_1, Y_1, Z_1)$$

oder mit $s = L^2\lambda + s_1$, da Γ eine quadratische Funktion ist,

$$(84^*)\quad \psi\zeta + \int\limits_S \frac{f'}{\varrho}\zeta' d\sigma' = s_1 - (2LX + X^2 + Y^2)\lambda - \frac{\omega^2}{2\varkappa}(a^2+b^2)\zeta^2$$
$$-2R\tau\lambda\zeta - (a^2+b^2)\lambda\zeta^2 - \frac{1}{\varkappa}(V^{(2)} + V^{(3)} + \ldots) - \frac{1}{2}\zeta^2\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\nu^2} - \Theta(X_1, Y_1, Z_1)$$

schreiben können.

Offenbar ist $\varkappa\psi$ die aus dem Zusammenwirken der Eigengravitation von T, des Außenfeldes $\varkappa G(x, y, z)$ und der Zentrifugalkraft resultierende Schwerkraft im Punkte $P(X, Y, Z)$ auf S. Nach bekannten Sätzen findet man

$$(85)\qquad \psi = -2f\boldsymbol{B}\frac{\boldsymbol{b}^2}{p}.$$ [119]

Die Integro-Differentialgleichung (84*) wird wie die Gleichung (75) III behandelt. Als kleine Parameter sind diesmal s_1, λL, h aufzufassen. (Man beachte, daß ω^2 als vorgegeben gilt.)

Die homogene lineare Integralgleichung

$$(86)\qquad \psi\zeta + \int\limits_S \frac{f'}{\varrho}\zeta' d\sigma' = 0$$

hat stets eine triviale Nullösung. Für abzählbar unendlichviele (sich gegen die Figur vom „nadelförmigen" Charakter häufende) Ellipsoide, die sämtlich der Reihe stärker abgeplatteter Ausgangsfiguren angehören und den Werten der Winkelgeschwindigkeit $\overset{0}{\omega} > \overset{1}{\omega} > \overset{2}{\omega} > \ldots$ entsprechen, hat sie darüber hinaus weitere Nullösungen. Diese wie jene lassen sich explizite mit Hilfe von Laméschen Funktionen ausdrücken. Vgl. loc. cit. [116] S. 721—726. In der Nachbarschaft der zu $\omega \neq \overset{k}{\omega}$ $(k \geqq 0)$ gehörigen Ellipsoide gibt es stets Lösungen unseres Problems. Die zu der Winkelgeschwindigkeit in den Intervallen

$$(87)\qquad \langle\varepsilon,\ \overset{0}{\omega} - \varepsilon\rangle,\ \langle\overset{k}{\omega} - \varepsilon,\ \overset{k+1}{\omega} + \varepsilon\rangle \quad (k \geqq 0,\ \varepsilon > 0 \text{ beliebig klein})$$

gehörigen Lösungen schließen sich nach geeigneter Normierung zu linearen Reihen zusammen. Von den zu $\overset{k}{\omega}$ $(k \geqq 0)$ gehörigen Ellipsoiden können möglicherweise neue Arme von reellen Gleichgewichtsfiguren abzweigen. Ob dies eintritt, kann erst eine nähere Diskussion entscheiden. Ins-

[119] Vgl. V. Garten, loc. cit. [116], S. 721. Die a. a. O. gebrauchten Bezeichnungen sind von denjenigen im Text zum Teil verschieden.

besondere ist das Ellipsoid $\overset{\circ}{S}$, in dem sich die beiden nach einem Kugelkörper bzw. einer Nadel zu strebenden Arme vereinen, ein singuläres Ellipsoid. In diesem besonders interessanten Falle läßt sich nach Einführung geeigneter Parameter bei der Diskussion der Verzweigungsgleichung die Heranziehung von Gliedern höherer Ordnung vermeiden. Von $\overset{\circ}{S}$ zweigt kein weiterer Arm von Gleichgewichtsfiguren ab. Die zu den beiden ersten Intervallen in (87) gehörigen Gleichgewichtsfiguren lassen sich zu einer linearen Reihe zusammenziehen. Eine Diskussion der zu $\overset{1}{\omega}, \overset{2}{\omega}, \ldots$ gehörigen singulären Ellipsoide begegnet vorderhand großen analytischen Schwierigkeiten.

Bei den vorstehenden Betrachtungen sind $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ als festgehalten vorausgesetzt worden. Wird $h = \frac{\boldsymbol{a}}{L}$ als klein angenommen, so heißt dies, $L = \frac{\boldsymbol{a}}{h}$ und wegen $\frac{\omega^2}{\varkappa} = \frac{M}{L^3} = \frac{M h^3}{\boldsymbol{a}^3}$ zugleich auch M erhalten große Werte. Ist jetzt $\delta > 0$ beliebig gewählt, so stellt die Konfiguration, die man erhält, indem man $T + S$ bei unveränderter Flüssigkeitsdichte einer Ähnlichkeitstransformation mit dem Verhältnis $\delta : 1$ in bezug auf den Koordinatenursprung unterwirft und zugleich M durch $M\delta^3$ ersetzt, eine neue Gleichgewichtsfigur dar, die ebenfalls zu der Winkelgeschwindigkeit ω gehört. Es sei $\boldsymbol{M}$ ein beliebiger fester Wert, und es sei $\delta = \frac{h}{\boldsymbol{a}} \left(\frac{\boldsymbol{M}\varkappa}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ gewählt Die Masse des neuen Zentralkörpers wird jetzt gleich $\boldsymbol{M}$, sein Abstand von dem Schwerpunkt des kleinen Mondes in einer ersten Näherung gleich $\left(\frac{\boldsymbol{M}\varkappa}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}$, der Durchmesser des kleinen Satelliten bis auf Größen höherer Ordnung gleich $2h\left(\frac{\boldsymbol{M}\varkappa}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}$. Für h ergibt das Verfahren der sukzessiven Approximationen eine für alle ω in jedem der Intervalle $\langle \varepsilon, \overset{\circ}{\omega} - \varepsilon \rangle$, $\langle \overset{k}{\omega} - \varepsilon, \overset{k+1}{\omega} + \varepsilon \rangle$ gleichmäßig geltende obere Schranke. Es steht nichts im Wege, h so zu wählen, daß die Satelliten jeder Schar ein festes, hinreichend kleines Volumen erhalten.

In dem ersten einführenden Teil seiner wiederholt genannten Arbeit behandelt Garten den einfacheren (zweidimensionalen) Fall eines mit einer homogenen Flüssigkeit erfüllten geraden beiderseits unbegrenzten Zylinderkörpers T_1 von angenähert elliptischem Querschnitt, dessen Mantellinien auf der x_0-y_0-Ebene senkrecht stehen, und der um die im Verhältnis zum Durchmesser von T_1 weit entfernte, festgehaltene z_0-Achse rotiert. Auf dieser ist eine gravitierende Masse konstanter Liniendichte ausgebreitet zu denken. Die Ergebnisse sind zu den vorhin besprochenen ganz analog. Die Rechnungen sind erheblich einfacher als in dem dreidimensionalen Falle. An Stelle der Laméschen Funktionen erscheinen jetzt trigonometrische Funktionen allereinfachster Art, die Werte $\overset{0}{\omega}, \overset{1}{\omega}, \overset{2}{\omega}, \ldots$ erweisen sich als Lösungen elementarer algebraischer

Gleichungen. Trotzdem bietet die Behandlung der Verzweigungsgleichungen für $\omega = \overset{k}{\omega}$ $(k > 0)$ auch jetzt noch Schwierigkeiten dar, die nicht überwunden werden konnten, und zwar, weil, wie es sich zeigt, die Heranziehung der Glieder von mindestens dritter Ordnung sich als notwendig erweist. Die eben erwähnten, den zweidimensionalen Fall betreffenden Resultate finden in dem dritten Teil der Gartenschen Arbeit bei Behandlung der *ringförmigen Gleichgewichtsfiguren mit Zentralkörper* Verwendung (vgl. loc. cit. [116] S. 726—745). Der Ansatz und die Rechnungen, die zu der fundamentalen Integro-Differentialgleichung führen, schließen sich eng an die in **22.** kurz wiedergegebenen Entwicklungen meiner in der Fußnote [108] genannten Arbeit an. Die Ergebnisse sind zu den in dem zwei- und dreidimensionalen Rocheschen Problem gewonnenen ganz analog.

Es macht keine ernsten Schwierigkeiten, von dem im vorstehenden betrachteten Problem eines um ein festgehalten zu denkendes, punktförmiges Attraktionszentrum rotierenden kleinen Satelliten zu dem Falle überzugehen, daß der (immer noch punktförmige) Zentralkörper und der Satellit mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den gemeinsamen Schwerpunkt wie ein starrer Körper rotieren. Ist wie vorhin M die Masse des Zentralkörpers, $m = \frac{4\pi}{3}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}f$ diejenige des Satelliten, L der Abstand des Mittelpunktes O des Satelliten von dem Attraktionszentrum, so ist derjenige des gemeinsamen Schwerpunktes, in den wir den Ursprung O_0 des Achsenkreuzes x_0, y_0, z_0 legen, von O gleich $L\frac{M}{M+m} = \boldsymbol{L}$. Die Formel (74) nimmt jetzt die Gestalt

$$(88)\qquad V(X,Y,Z) + \frac{\omega^2}{2\varkappa}[(\boldsymbol{L}+X)^2 + Y^2] + G_M(X,Y,Z) = \Phi(X,Y,Z),$$

unter G_M auch diesmal der Ausdruck (78) verstanden, an. In der Gleichung (80) treten als Faktoren von $\frac{\omega^2}{2\varkappa f}$ bzw. $\frac{\omega^2}{\varkappa f}$ in dem dritten und dem fünften Summanden $\boldsymbol{L}^2$ und $\boldsymbol{L}$ statt L^2 und L auf. Dementsprechend ändern sich die Beziehungen (81). Insbesondere gilt jetzt

$$(89)\qquad \frac{\omega^2}{\varkappa f} = \frac{M}{fL^2\boldsymbol{L}} = \frac{M}{fL^3}\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Bei gleichbleibender Entfernung L ist jetzt $\frac{\omega^2}{\varkappa f}$ im Verhältnis $1 + \frac{m}{M}$ größer als in dem vorhin betrachteten Falle eines festgehaltenen Attraktionszentrums. Die Weiterbehandlung des Problems bietet an Hand der Entwicklungen auf S. 146 ff. keine Schwierigkeiten dar. Die qualitativen Ergebnisse bleiben die gleichen.

An das Vorstehende schließt naturgemäß die Behandlung des Falles an, daß das Attraktionszentrum nicht mehr als punktförmig aufgefaßt wird, sondern aus einer homogenen Flüssigkeit, deren Gestalt sich nur

wenig von derjenigen eines Maclaurinschen Ellipsoids unterscheidet, besteht. Die Rücksicht auf den zur Verfügung stehenden Raum zwingt uns, uns mit dieser Andeutung zu begnügen.

25. Die Laplacesche Theorie des Erdmondes. Wie vorhin bemerkt, sind für sehr kleine Werte der Winkelgeschwindigkeit die weniger abgeplatteten Rocheschen Annäherungsellipsoide nur wenig von einer Kugel verschieden. Dasselbe gilt natürlich auch von der exakten Gleichgewichtsfigur. Das Problem eines von einem festgehalten zu denkenden Attraktionszentrum weit entfernten Mondes gestattet darum noch eine andere, von der vorstehenden allgemeinen Theorie unabhängige Behandlung, wobei als Ausgangsfigur in naheliegender Weise ein der Einwirkung eines Außenfeldes nicht unterworfener Kugelkörper zur Verwendung kommt[120].

Wir schließen uns eng an die vorhin gebrauchten Bezeichnungen an. Der Radius der Kugel S heißt darum jetzt $\boldsymbol{a}(=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c})$, die Richtungskosinus der Außennormale (ν) sind

$$(90) \qquad a=\frac{X}{\boldsymbol{a}}, \quad b=\frac{Y}{\boldsymbol{b}}, \quad c=\frac{Z}{\boldsymbol{c}}.$$

Es gilt ferner

$$(91) \qquad \frac{1}{f}V(x,y,z)=2\pi\boldsymbol{a}^2-\frac{2\pi}{3}r^2, \qquad (r^2=x^2+y^2+z^2),$$

$$(92) \qquad \begin{aligned} G_M(x,y,z)&=\frac{M}{2L^3}[2L^2-2xL+2x^2-y^2-z^2]+\Theta(x,y,z),\\ \Theta(x,y,z)&=\frac{M}{L}O\left(\frac{\boldsymbol{a}^3}{L^3}\right).\end{aligned}$$

Da T ruht, so ist jetzt $\omega=0$, und λ erhält den Wert $\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}$, unter ω_1 die Winkelgeschwindigkeit der gesuchten Gleichgewichtsfigur T_1 verstanden. Wie vorhin bemerkt, ist T der Einwirkung eines Außenfeldes nicht ausgesetzt, bei T_1 tritt dagegen ein Zusatzfeld $\varkappa G_M(x,y,z)$ auf. Eine sinngemäße Anwendung der am Schluß von **11.** gewonnenen Formel führt, wenn wir berücksichtigen, daß jetzt $\Gamma=0$, $\hat{s}\hat{\Gamma}=G_M$ zu setzen ist, zu der Integro-Differentialgleichung

$$(93) \quad \psi\zeta+\int_S\frac{f'}{\varrho}\zeta'd\sigma'=\boldsymbol{s}-\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}[R^2+2R\boldsymbol{\tau}\zeta+(a^2+b^2)\zeta^2]-\frac{1}{\varkappa}(V^{(2)}+V^{(3)}+\dots)$$
$$-\frac{M}{2L^3}[2L^2-2X_1L+2X_1^2-Y_1^2-Z_1^2]-\Theta(X_1,Y_1,Z_1),$$

die man wegen

$$(94) \qquad \begin{aligned} &R^2=L^2+2LX+X^2+Y^2,\\ &X_1=X\left(1+\frac{\zeta}{\boldsymbol{a}}\right),\ Y_1=Y\left(1+\frac{\zeta}{\boldsymbol{a}}\right),\ Z_1=Z\left(1+\frac{\zeta}{\boldsymbol{a}}\right)\end{aligned}$$

[120] Vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Erste Abhandlung. Die Laplacesche Theorie der Gestalt des Erdmondes. Math. Zeitschr. **10** (1921), S. 130—159.

auch in der Form

$$(95)\quad \psi\zeta + \int_S \frac{f'}{\varrho}\zeta' d\sigma' = s - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}[L^2 + 2LX + X^2 + Y^2 + 2R\tau\zeta + (a^2+b^2)\zeta^2]$$
$$- \frac{1}{\varkappa}(V^{(2)} + V^{(3)} + \ldots) - \frac{M}{2L^3}\left[2L^2 - 2XL - 2X\frac{\zeta}{a}L + 2X_1^2 - Y_1^2 - Z_1^2\right]$$
$$-\Theta(X_1, Y_1, Z_1)$$

schreiben kann. In (95) bezeichnet $\varkappa\psi$ die von der Eigengravitation herrührende Schwerkraft auf S. Offenbar ist

$$(96)\qquad \psi = -\frac{4\pi}{3}af.$$

Die Integralgleichung, die man erhält, wenn man in (95) rechterhand Null setzt, und die auf die Form

$$(97)\qquad \zeta - \frac{3}{4\pi a}\int_S \frac{\zeta'}{\varrho}d\sigma' = 0$$

gebracht werden kann, hat drei linear unabhängige, der Parallelverschiebung in der Richtung der drei Koordinatenachsen entsprechende wie in **8.** normierte Nullösungen

$$(98)\qquad \frac{3}{4\pi f}\frac{X}{a^{\frac{5}{2}}},\quad \frac{3}{4\pi f}\frac{Y}{a^{\frac{5}{2}}},\quad \frac{3}{4\pi f}\frac{Z}{a^{\frac{5}{2}}}.$$

Nach bekannten Sätzen (vgl. **8.**) hat die Integralgleichung

$$(99)\qquad \psi\zeta + \int_S f'N(\sigma,\sigma')\zeta' d\sigma' = 0,\quad N(\sigma,\sigma') = \frac{1}{\varrho} - \frac{XX' + YY' + ZZ'}{a^3}$$

keine Nullösungen mehr. Setzt man, wie wir es tun wollen, voraus, daß die Ortsfunktion ζ die Ebenen $y=0$ und $z=0$ zu Symmetrieebenen hat, und schreibt

$$(100)\qquad -\int_S \frac{f'X'\zeta'}{a^3}d\sigma' = wL,$$

so nimmt (95) die Gestalt

$$(101)\qquad \psi\zeta + \int_S f'N(\sigma,\sigma')\zeta' d\sigma' = XwL + s$$
$$-\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}[L^2 + 2LX + X^2 + Y^2 + 2R\tau\zeta + (a^2+b^2)\zeta^2] - \frac{1}{\varkappa}(V^{(2)} + V^{(3)} + \ldots)$$
$$-\frac{M}{2L^3}\left[2L^2 - 2XL - 2X\frac{\zeta}{a}L + 2X_1^2 - Y_1^2 - Z_1^2\right] - \Theta(X_1, Y_1, Z_1)$$

an. Wir setzen jetzt

$$(102)\qquad \frac{\omega_1^2}{\varkappa} = \frac{M}{L^3} + w,\quad s - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}L^2 - \frac{M}{L} = 0$$

und erhalten

$$(103)\quad \psi\zeta + \int_S f'N(\sigma,\sigma')\zeta' d\sigma' = -\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}[X^2 + Y^2 + 2R\tau\zeta + (a^2+b^2)\zeta^2]$$
$$-\frac{1}{\varkappa}(V^{(2)} + V^{(3)} + \ldots) + \frac{M}{2L^3}\left[2X\frac{\zeta}{a}L - 2X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2\right] - \Theta(X_1, Y_1, Z_1).$$

Wir halten $M, f, \boldsymbol{a}$ fest und fassen $\frac{\boldsymbol{a}}{L}$, $\frac{M}{L^2}$ und $\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}L$, darum auch $\boldsymbol{w}L$ als kleine Größen auf. Den im dritten Kapitel entwickelten Sätzen zufolge hat die Integro-Differentialgleichung (103) für alle hinreichend kleinen Werte der vorstehenden Parameter eine und nur eine Lösung. Der quadratischen Gleichung (130) III entspricht diesmal eine Gleichung von der Form

$$\pi = \frac{\mathring{\alpha}}{L}p + \mathring{A}(p\pi + \pi^2), \quad p = \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}L + \frac{M}{L^2}. \tag{104}$$

Die kleinere (positive) Wurzel dieser Gleichung, darum auch ζ ist von der Größenordnung $\frac{p}{L}$,

$$|\zeta| \leqq \bar{\alpha}\left(\frac{\omega_1^2 \boldsymbol{a}^2}{2\varkappa} + \frac{M\boldsymbol{a}^2}{L^3}\right) \qquad (\bar{\alpha} \text{ konstant}). \tag{105}$$

Wie wir wissen, ist ζ als Funktion von $\frac{\boldsymbol{a}}{L}$, $\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}L$ und $\frac{M}{L^2}$ aufgefaßt, analytisch und regulär. Wegen (100) erscheint auch $\boldsymbol{w}$ als eine analytische und reguläre Funktion derselben Parameter,

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{a}}{L}\mathfrak{p}\left(\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}L, \frac{M}{L^2}, \frac{\boldsymbol{a}}{L}\right). \tag{105*}$$

Nach (100) und (105) ist

$$|\boldsymbol{w}| \leqq \bar{\bar{\alpha}}\left(\frac{\omega_1^2 \boldsymbol{a}^2}{2\varkappa L} + \frac{M\boldsymbol{a}^2}{L^4}\right) \qquad (\bar{\bar{\alpha}} \text{ konstant}). \tag{106}$$

Wie man leicht sieht, läßt sich die Gleichung

$$\frac{\omega_1^2}{\varkappa} = \frac{M}{L^3} + \frac{\boldsymbol{a}}{L}\mathfrak{p}\left(\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}L, \frac{M}{L^2}, \frac{\boldsymbol{a}}{L}\right) \quad (\text{vgl. (102) und (105*)}) \tag{107}$$

nach $\frac{\omega_1^2}{\varkappa}$ auflösen und liefert

$$\frac{\omega_1^2}{\varkappa} = \frac{M}{L^3} + \frac{\boldsymbol{a}}{L}O\left(\frac{M}{L^3}\right). \tag{108}$$

Danach ist, wie man leicht sieht, ζ von der Größenordnung $\frac{M}{f\boldsymbol{a}^2}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{L}\right)^3$. Eine weiter ins einzelne gehende Berechnung liefert

$$\zeta = -\frac{3M}{8\pi f L^3 \boldsymbol{a}}\left(\frac{5}{2}\left(Z^2 - 3X^2\right) + 2\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a}^2 O\left(\frac{\boldsymbol{a}}{L}\right)\right). \tag{109}$$ [121]

---

[121] In der in der Fußnote [120] zitierten Arbeit ist diese Diskussion in allen Einzelheiten durchgeführt worden. (Mechanische Deutung und Verbesserung einiger Rechenfehler findet sich bei E. Hölder, Beiträge zur mathematischen Theorie des Erdmondes, Sächsische Berichte, 78 (1926), S. 21—36.) In einer späteren Arbeit (vgl. die Fußnote [122]) habe ich anläßlich der Bestimmung einer Gleichgewichtsfigur, die aus zwei weit entfernten flüssigen, um den gemeinsamen Schwerpunkt rotierenden Massen besteht, bemerkt, daß sich eine Diskussion der Verzweigungsgleichung durch die Einführung eines geeigneten Parameters vermeiden läßt und darauf hingewiesen, daß sich das gleiche bei dem jetzt betrachteten Problem in ähnlicher Weise erreichen läßt.

Durch die Einbeziehung des Parameters $\boldsymbol{w}$ in den Ausdruck (102) für die Winkelgeschwindigkeit gelang es, eine sonst notwendige recht umständliche Diskussion zu vermeiden (vgl. loc. cit. [120] S. 143).

26. Flüssige Doppel- und Mehrfachsternsysteme. Wir gehen jetzt zur Behandlung eines Problems über, das mit denjenigen, die uns in **24.** beschäftigten, nahe verwandt ist, nämlich zur Bestimmung einer Gleichgewichtsfigur, die aus zwei weit entfernten Flüssigkeitsmassen gleicher Dichte, T_1 und $\dot{T}_1$, die um ihren gemeinsamen Schwerpunkt rotieren, besteht. Der Einfachheit halber nehmen wir T_1 und $\dot{T}_1$ als kongruent und in bezug auf den Schwerpunkt, in den wir den Ursprung des Achsenkreuzes x_0, y_0, z_0 setzen, symmetrisch gelegen[122] an. Des weiteren sollen T_1 und $\dot{T}_1$ sich nur wenig von Kugelkörpern, T und $\dot{T}$, vom Radius $\boldsymbol{a}$ unterscheiden. Augenscheinlich genügt es, die Gestalt von T_1, d. h. die diese Gestalt festlegende Ortsfunktion ζ auf S zu bestimmen. Die entsprechende zu $\dot{T}$ und $\dot{T}_1$ gehörende Funktion $\dot{\zeta}$ wird damit zugleich bestimmt sein. Wir übernehmen sinngemäß die in **25.** gebrauchten Bezeichnungen, legen insbesondere in den Mittelpunkt der Kugel S den Ursprung des Achsenkreuzes x-y-z. Augenscheinlich unterscheidet sich das Problem, mit dem wir uns im Augenblick beschäftigen, von dem zuletzt behandelten lediglich darin, daß das Außenfeld, das auf T_1 wirkt, nicht von dem in O gelegenen Attraktionszentrum, sondern von der Flüssigkeitsmasse $\dot{T}_1$ herrührt. Für $\dot{T}_1 = \dot{T} + (\dot{T}_1 - \dot{T})$ können wir ein punktförmiges Zentrum der Masse $\frac{4\pi}{3}\boldsymbol{a}^3 f$ im Mittelpunkt $(-L, 0, 0)$ von $\dot{T}$, somit in einer Entfernung $2L$ vom Mittelpunkt von T und eine schalenförmige gravitierende Masse $\dot{T}_1 - \dot{T}$ substituieren. Das Gravitationspotential $\varkappa G_p^*(x, y, z)$ der punktförmigen Masse in T_1 erhalten wir aus (78), indem wir für M den Wert $\frac{4\pi}{3}\boldsymbol{a}^3 f$ einführen und L durch $2L$ ersetzen. Wir finden

$$(110)\qquad \begin{aligned} G_p^*(x, y, z) &= \frac{4\pi}{3}\boldsymbol{a}^3 f[(2L+x)^2+y^2+z^2]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\pi}{12}\frac{\boldsymbol{a}^3}{L^3} f\,[8L^2 - 4xL - (y^2+z^2-2x^2)] + \Theta^*(x, y, z), \\ &(r^2 = x^2+y^2+z^2), \quad \Theta^*(x, y, z) = r^2\, O\left(\frac{r^4}{L^4}\right). \end{aligned}$$

Was das Gravitationspotential $\varkappa G_s^*(x, y, z)$ des Körpers $\dot{T}_1 - \dot{T}$ anlangt, so gilt

$$(111)\quad |\varkappa G_s^*(x, y, z)| < 4\pi\varkappa f\frac{1}{L}(\boldsymbol{a}+\Omega)^2\Omega, \quad \Omega = \mathrm{Max}\left\{|\zeta|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right|\right\}.$$

[122] Für das Folgende vergleiche L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Zweite Abhandlung. Eine aus zwei getrennten Massen bestehende Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit. Math. Zeitschr. **12** (1922), S. 201—218. A. a. O. wird allgemeiner angenommen, daß sowohl die Dichte als auch der Durchmesser der beiden Körper verschiedene Werte haben können.

In der Tat ist das Volumen von $\dot{T}_1 - \dot{T}$ gewiß nicht größer als $4\pi(\boldsymbol{a}+\Omega)^2\Omega$, der Abstand irgendeines Paares von Punkten in $\dot{T}_1 - T$ einerseits, in T_1 anderseits sicher $> 2L - 2\boldsymbol{a} - 2\Omega > L$, sofern, wie wir es tun wollen, $\frac{\boldsymbol{a}+\Omega}{L} < \frac{1}{2}$ angenommen wird.

Bei der Aufstellung der Integro-Differentialgleichung des Problems ist zu beachten, daß das Außenfeld auch diesmal gleich Null, das Zusatzfeld aber $= \varkappa G_p^* + \varkappa G_s^*$ ist. Man erhält

$$\begin{aligned}(112)\qquad \psi\zeta + \int\limits_S \frac{f'}{\varrho}\zeta' d\sigma' = \boldsymbol{s} - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\left[R^2 + 2R\boldsymbol{\tau}\zeta + (a^2+b^2)\zeta^2\right] \\ -\frac{1}{\varkappa}\left(V^{(2)} + V^{(3)} + \ldots\right) - \frac{\pi\boldsymbol{a}^3 f}{12L^3}\left[8L^2 - 4X_1 L + 2X_1^2 - Y_1^2 - Z_1^2\right] \\ - \Theta^*(X_1, Y_1, Z_1) - G_s^*(X_1, Y_1, Z_1).\end{aligned}$$

Für das Potential G_s^* ließe sich ohne große Mühe eine Entwicklung finden, aus der seine Abhängigkeit von ζ klar hervortreten würde (vgl. loc. cit. [122]). Für den Konvergenzbeweis der später anzusetzenden sukzessiven Näherungen ist die Kenntnis dieser Entwicklung, wie wir sogleich sehen werden, nicht notwendig. Anders wäre es, wenn wir die zweite oder eine höhere Näherung explizit berechnen wollten.

Indem wir jetzt

$$(113)\qquad -\int\limits_S \frac{f' X'}{\boldsymbol{a}^3}\zeta' d\sigma' = 2\boldsymbol{w}L$$

setzen, erhalten wir wie auf S. 151

$$\begin{aligned}(114)\qquad \psi\zeta + \int\limits_S f' N(\sigma,\sigma')\zeta' d\sigma' = 2X\boldsymbol{w}L + \boldsymbol{s} - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\left[L^2 + 2LX + X^2 + Y^2\right. \\ \left. + 2R\boldsymbol{\tau}\zeta + (a^2+b^2)\zeta^2\right] - \frac{1}{\varkappa}\left(V^{(2)} + V^{(3)} + \ldots\right) - \frac{\pi\boldsymbol{a}^3 f}{12L^3}\left[8L^2 - 4XL\right. \\ \left. - 4X\frac{\zeta}{\boldsymbol{a}}L + 2X_1^2 - Y_1^2 - Z_1^2\right] - \Theta^*(X_1, Y_1, Z_1) - G_s^*(X_1, Y_1, Z_1).\end{aligned}$$

Mit

$$(115)\qquad \frac{\omega_1^2}{2\varkappa} = \frac{\pi\boldsymbol{a}^3 f}{6L^3} + \boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{s} - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}L^2 - \frac{2\pi\boldsymbol{a}^3 f}{3L} = 0$$

geht (114) über in

$$\begin{aligned}(116)\qquad \psi\zeta + \int\limits_S f' N(\sigma,\sigma')\zeta' d\sigma' = -\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\left[X^2 + Y^2 + 2R\boldsymbol{\tau}\zeta + (a^2+b^2)\zeta^2\right] \\ -\frac{1}{\varkappa}\left(V^{(2)} + V^{(3)} + \ldots\right) + \frac{\pi\boldsymbol{a}^3 f}{12L^3}\left[4X\frac{\zeta}{\boldsymbol{a}}L - 2X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2\right] \\ - \Theta^*(X_1, Y_1, Z_1) - G_s^*(X_1 Y_1, Z_1).\end{aligned}$$

Die weitere Behandlung verläuft ganz wie auf S. 151 ff. Wir finden

$$(117)\qquad \frac{\omega_1^2}{\varkappa} = \frac{\pi\boldsymbol{a}^3 f}{3L^3} + \frac{\boldsymbol{a}}{L}O\left(\frac{\boldsymbol{a}^3}{L^3}\right),$$

worauf sich ζ als von der Größenordnung $\boldsymbol{a}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{L}\right)^3$ erweist. — Was den Konvergenzbeweis der sukzessiven Näherungen betrifft, so stützt sich dieser wie in allen Fällen, die wir in diesem Buch zu betrachten hatten, auf gewisse fundamentale Ungleichheiten, denen der Ausdruck auf der rechten Seite der in Frage kommenden Integro-Differentialgleichung genügt (vgl. S. 152). Der Beweis jener Ungleichheiten macht keine Schwierigkeiten und läßt sich ohne Benutzung der vorhin erwähnten Entwicklung für $G_s^*(X_1, Y_1, Z_1)$ führen.

Es macht keine Schwierigkeiten, $\boldsymbol{a}$ so zu bestimmen, daß das Volumen von T_1, also auch das mit ihm gleiche Volumen von $\dot{T}_1$ einen vorgeschriebenen Wert erhält.

Nicht wesentlich schwieriger ist schließlich die Behandlung des allgemeineren Falles, wenn die Durchmesser $\boldsymbol{a}$ und $\dot{\boldsymbol{a}}$ von T und $\dot{T}$ sowie die Dichten f und $\dot{f}$ der beiden Flüssigkeitskörper nicht notwendig entsprechend einander gleich sind. Jetzt wird man für ζ und $\dot{\zeta}$ je eine Integro-Differentialgleichung erhalten. Das System dieser simultanen Gleichungen wird unter Benutzung von zwei Parametern $\boldsymbol{w}$ und $\dot{\boldsymbol{w}}$ gelöst.

In dem Vorstehenden war ausdrücklich von einem Doppelstern die Rede. Betrachten wir nun ein System von Massenpunkten in einer der verschiedenen Lagrangeschen Konfigurationen des n-Körperproblems und stellen uns die einzelnen Massenpunkte zu kleinen flüssigen Kugelkörpern ausgeweitet vor. Die so gewonnene Anordnung erfüllt, wenn die Kugelradien im Verhältnis zu dem Abstand ihrer Mittelpunkte hinreichend klein sind, in einer ersten Näherung die Gleichgewichtsbedingungen und kann als Ausgangspunkt zur Bestimmung neuer exakter Gleichgewichtsfiguren dienen. Eine systematische Untersuchung der sich darbietenden Möglichkeiten hat im Anschluß an meine in der Fußnote [122] genannte Arbeit E. Kähler in seiner Leipziger Dissertation durchgeführt[123]. Die Ergebnisse von Kähler sind auch darum von Interesse, weil es an Hand dieser E. Hölder gelungen ist, die schon von Kähler vermutete Existenz von Gleichgewichtsfiguren mit nur einer Symmetrieebene zu beweisen (vgl. S. 74).

27. Flüssige Doppelsterne mit einem starren Kern. Mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung wollen wir im folgenden noch ganz kurz ein mit dem in **26.** behandelten nahe verwandtes Problem betrachten.

Zwei gleiche in $\dot{P} = (-D, 0, 0)$ und $P = (D, 0, 0)$ angebrachte punktartige Massen M rotieren mit konstanter Winkelgeschwindigkeit

---

[123] Vgl. E. Kähler, Über die Existenz von Gleichgewichtsfiguren, die sich aus gewissen Lösungen des n-Körperproblems ableiten. Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 220—237.

$\mathring{\omega} = \left(\frac{\varkappa M}{4 D^3}\right)^{\frac{1}{2}}$ um die z-Achse des kartesischen Achsenkreuzes x-y-z und befinden sich dabei im dynamischen Gleichgewicht. Man denke sich jetzt um $\dot{P}$ und P als Mittelpunkte je einen kleinen Kugelkörper $\dot{T}$ und T vom Halbmesser $\mathfrak{r}$ aus einer homogenen Flüssigkeit der Dichte f und lasse das Ganze wie einen starren Körper mit derselben Winkelgeschwindigkeit $\mathring{\omega}$ um die z-Achse rotieren. Bei festgehaltenem M, D und f und hinreichend kleinem $\mathfrak{r}$ stellt die Konfiguration in einer ersten Näherung eine Gleichgewichtsfigur dar. Wir fragen: gibt es in der Nachbarschaft von $\dot{T}$ und T zwei in bezug auf den Ursprung symmetrisch gelegene Flüssigkeitskörper $\dot{T}_1$ und T_1, die vereint mit den Massen M in $\dot{P}$ und P, bei passender Wahl der Winkelgeschwindigkeit ω_1 in der Umgebung von $\mathring{\omega}$ eine Gleichgewichtskonfiguration ergeben? Mit anderen Worten, ist es möglich, T_1 somit auch $\dot{T}_1$ einerseits, ω_1 andererseits so zu bestimmen, daß 1. auf S_1 und $\dot{S}_1$ das Gesamtpotential der Gravitations- und Zentrifugalkräfte je einen festen Wert hat, 2. in $\dot{P}$ und P die Resultierende der Gravitationskräfte der Zentrifugalkraft das Gleichgewicht hält?

Wir beziehen, wie üblich, S_1 und $\dot{S}_1$ auf S und $\dot{S}$ durch Vermittelung der krummlinigen Koordinaten ξ, η, ζ und $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$. Wir denken uns S und $\dot{S}$ durch parallele Normalen auf die Einheitskugel bezogen und wählen für ξ, η bzw. $\dot{\xi}, \dot{\eta}$ irgendein krummliniges Koordinatensystem auf der Einheitskugel. Wir nehmen ferner an, daß $\frac{1}{\mathfrak{r}}|\zeta|$, $\frac{1}{\mathfrak{r}}\left|\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right|$, $\frac{1}{\mathfrak{r}}\left|\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right|$ als kleine Größen aufgefaßt werden können. Aus Gründen der Symmetrie genügt es, von der Gleichgewichtsbedingung auf S_1 allein auszugehen. Als Ausgangskonfiguration fassen wir den Körper T im Ruhezustande auf. Als Fremdfeld $\varkappa G$ in der Bezeichnungsweise von **11.** gilt das Feld der Masse in P, als Zusatzfeld $\varkappa \hat{s} \hat{G}$ das Gravitationspotential $\varkappa G_{\dot{P}} + \varkappa G_{\dot{T}_1}$ der Masse in $\dot{P}$ sowie des Flüssigkeitskörpers $\dot{T}_1$. Die Schwerkraft auf S als Resultierende aus der Eigengravitation und derjenigen der Außenmasse P, hat jetzt den Wert

$$\varkappa \psi = -\frac{\varkappa}{\mathfrak{r}^2}\left(M + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}^3 f\right). \tag{118}$$

Des weiteren ist (vgl. **11.**) $\omega = 0$, $\lambda = \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}$; augenscheinlich ist diesmal λ nicht notwendig als klein aufzufassen.

Wir gehen von der Formel (206) III aus, wobei wir zur Vereinfachung rechter Hand für

$$\hat{s}\hat{\Gamma} + \hat{s}\zeta \frac{\partial}{\partial \nu}\hat{\Gamma} + \hat{s}\frac{\zeta^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\hat{\Gamma} + \ldots$$

den Wert

$$\hat{s}\hat{G}(X_1, Y_1, Z_1; \hat{s}) = G_{\dot{P}}(X_1, Y_1, Z_1) + G_{\dot{T}_1}(X_1, Y_1, Z_1)$$

setzen. Die Entwicklung des Zusatzpotentials nach Potenzen von ζ erweist sich im vorliegenden Falle als überflüssig. Wir erhalten so

$$(119)\qquad -\frac{1}{\mathfrak{r}^2}\left(M+\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}^3 f\right)\zeta+\int\limits_S \frac{f'}{\varrho}\zeta' d\sigma'$$
$$= s-\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}(X^2+Y^2+2R\tau\zeta+(a^2+b^2)\zeta^2)-\frac{1}{\varkappa}(V^{(2)}+V^{(3)}+\ldots)$$
$$-G_{\dot P}(X_1,Y_1,Z_1)-G_{\dot T_1}(X_1,Y_1,Z_1)-\frac{\zeta^2}{2}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\nu^2}-\ldots$$

und, indem wir $s=\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}D^2$ setzen, nach Multiplikation mit $\mathfrak{r}^2$ und naheliegender Umformung

$$(120)\qquad \left(M+\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}^3 f\right)\zeta=\mathfrak{r}^2\int\limits_S\frac{f'}{\varrho}\zeta' d\sigma'+\mathfrak{r}^2\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}(X^2+Y^2-D^2+2R\tau\zeta$$
$$+(a^2+b^2)\zeta^2)+\mathfrak{r}^2\frac{1}{\varkappa}(V^{(2)}+V^{(3)}+\ldots)+\mathfrak{r}^2G_{\dot P}(X,Y,Z)+\mathfrak{r}^2G_{\dot T_1}(X,Y,Z)$$
$$+\mathfrak{r}^2\{G_{\dot P}(X_1,Y_1,Z_1)-G_{\dot P}(X,Y,Z)\}+\mathfrak{r}^2\{G_{\dot T_1}(X_1,Y_1,Z_1)-G_{\dot T_1}(X,Y,Z)\}$$
$$+\mathfrak{r}^2\left\{\frac{\zeta^2}{2}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\nu^2}+\ldots\right\}.$$

Die Auflösung dieser Gleichung durch sukzessive Approximationen bietet keinerlei Schwierigkeiten dar. Es erweist sich nicht einmal als nötig beim Übergang von der n-ten zu der $(n+1)$-ten Näherung eine lineare nichthomogene Integralgleichung aufzulösen. Vielmehr gilt, wenn man vorübergehend die rechte Seite in (120) mit $\Pi\{\zeta\}$ bezeichnet, einfach

$$(121)\qquad \left(M+\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}^3 f\right)\overset{n+1}{\zeta}=\Pi\{\overset{n}{\zeta}\}.$$

Als ein kleiner Parameter tritt jetzt $\mathfrak{r}$ auf. Einige Vorsicht erfordert die Abschätzung der Ausdrücke $\Psi=V^{(2)}+V^{(3)}+\ldots$, $\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}$ und der Umstand, daß $\left\{\zeta^2\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\nu^2}+\ldots\right\}$ sich wie $\mathfrak{r}^{-3}\Omega^2$ verhält. Man findet

$$|\Psi|,\quad\left|\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right|,\quad\left|\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right|\leqq\mathring{a}\Omega^2\qquad(\mathring{a}\text{ konstant}).$$

Wie man ferner leicht sieht, sind die Terme $\mathfrak{r}^2G_{\dot P}(X,Y,Z)$, $\mathfrak{r}^2G_{\dot T_1}(X,Y,Z)$ von der zweiten, alle übrigen von der dritten und höheren Ordnung in bezug auf $\mathfrak{r}$ und ζ. Insbesondere ist wegen $X^2+Y^2-D^2=O(\mathfrak{r})$ auch der Ausdruck $\mathfrak{r}^2\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}(X^2+Y^2-D^2)$ von der dritten Ordnung. Für die quadratische Gleichung (130) III tritt jetzt eine Gleichung von der Form

$$(121^*)\qquad \pi=\overset{1}{A}\left(\mathfrak{r}^2+\mathfrak{r}^2\pi+\frac{1}{\mathfrak{r}}\pi^2\right).$$

Die kleinere (positive) Wurzel und damit auch ζ ist jetzt von der Ordnung $\mathfrak{r}^2$. Natürlich ist die durch sukzessive Approximationen gewonnene Lösung der Integro-Differentialgleichung die einzige ihrer Art.

Man kann übrigens alle diese Spezialbetrachtungen umgehen, indem man durch eine Ähnlichkeitstransformation (vgl. S. 148) zu einem System von zwei mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathring{\omega}$ um die z-Achse rotierenden Flüssigkeitskugeln vom Radius 1 und Dichte f um die beiden um $\frac{2D}{\mathfrak{r}}$ voneinander entfernten punktartigen, mitrotierenden Massen $\frac{M}{\mathfrak{r}^3}$ als Ausgangskonfiguration übergeht. Für hinreichend kleine $\mathfrak{r}$ gibt es gewiß eine exakte Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft der zuletzt genannten Konfiguration. Eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Verhältnis $\mathfrak{r}:1$ um den Symmetriepunkt des Systems liefert die soeben auf einem anderen Wege gefundene Flüssigkeitskonfiguration wieder. Die Winkelgeschwindigkeit ist jetzt gleich ω_1.

Und nun die Bestimmung von ω_1, so daß der zweiten vorhin angegebenen Bedingung des Gleichgewichts Genüge getan wird. Auch hier könnte man durch sukzessive Näherungen vorgehen. Es sei ζ_0 die zu dem Werte $\mathring{\omega}$ der gesuchten Winkelgeschwindigkeit gehörende Lösung von (120), und es mögen T_1^0, $\dot{T}_1^0$ die zugehörigen Flüssigkeitskörper heißen. Die Bedingung 2. ist nicht erfüllt, vielmehr müßte, damit sie erfüllt sei, die Winkelgeschwindigkeit einen von $\mathring{\omega}$ verschiedenen Wert ω_1 haben. Es sei ζ_1 die Lösung derjenigen Integro-Differentialgleichung, die man erhält, wenn man in (120) ω_1 durch ω_1 ersetzt. Zu ζ_1 gehört als der die zweite Gleichgewichtsbedingung erfüllende Wert der Winkelgeschwindigkeit ω_2. Ersetzt man ω_1 in (120) durch ω_2, so gewinnt man ζ_2 usw. Wie sich ohne große Mühe zeigen läßt, konvergiert die Folge $\mathring{\omega}, \omega_1, \omega_2, \ldots$ gegen einen Wert ω_1, zugleich konvergieren die Folgen $\zeta_k, \frac{\partial \zeta_k}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta_k}{\partial \eta}$ gleichmäßig gegen $\zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$. Die Ortsfunktion ζ stellt die zu dem eben gefundenen Werte der Winkelgeschwindigkeit ω_1 gehörige Lösung der Integro-Differentialgleichung dar. Das System ζ, ω_1 erfüllt die beiden Bedingungen des Gleichgewichts, unser Problem ist als gelöst zu betrachten.

Es leuchtet ein, daß man die beiden punktförmigen Attraktionszentra auch durch kleine starre Kugelkörper ersetzen kann.

28. Ein mit den kosmogonischen Theorien von Poincaré und Darwin zusammenhängendes Problem. Das im vierten Kapitel entwickelte Verfahren führt, in geeigneter Weise ausgestaltet, zur Auflösung eines interessanten Problems, das sich in gewissen kosmogonischen Betrachtungen von Poincaré und Darwin darbietet[124].

Wir beginnen mit einigen vorbereitenden Betrachtungen. In den Punkten $\dot{P} = (-D, 0, 0)$ und $P = (D, 0, 0)$ des Raumes der Variablen x, y, z mögen sich zwei punktförmige Attraktionszentra der Masse M

[124] Vgl. H. Poincaré, loc. cit. [38] S. 378—380; G. H. Darwin, Scientific papers Bd. III, insb. S. 436—524.

befinden. Das Ganze rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathring{\omega} = \left(\frac{\varkappa M}{4 D^3}\right)^{\frac{1}{2}}$ um die z-Achse. Die Gravitations- und Zentrifugalkräfte an $\dot{P}$ und P halten sich dabei das Gleichgewicht. Das Gesamtpotential ist

$$(122)\qquad \mathring{U} = \varkappa M\left(\frac{1}{\dot{d}} + \frac{1}{d}\right) + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2),$$
$$\dot{d}^2 = (x+D)^2 + y^2 + z^2, \qquad d^2 = (x-D)^2 + y^2 + z^2.$$

Aus Gründen der Symmetrie sind in (0, 0, 0) partielle Ableitungen erster Ordnung, gemischte Ableitungen zweiter Ordnung und die Ableitungen dritter Ordnung von $\mathring{U}$ gleich Null. Man verifiziert leicht, daß $\mathring{U}$ in der Umgebung des Ursprunges eine Entwicklung von der Form

$$(123)\qquad \mathring{U} = \mathring{U}(x, y, z) = \frac{2\varkappa M}{D} + \frac{\varkappa M}{8 D^3}(17 x^2 - 7 y^2 - 8 z^2) + O(r^4)$$

gestattet. Sie gilt für alle hinreichend kleinen Werte von $r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$, etwa für $r < r_0$.[125] Die Niveaufläche $\mathring{U} = \frac{2\varkappa M}{D}$ besteht aus einer, uns nicht weiter interessierenden, sich bis ins Unendliche erstreckenden Schale und einer geschlossenen in bezug auf die drei Koordinatenebenen symmetrischen, analytischen und regulären Fläche S^*, die im Koordinatenursprung einen konischen Punkt hat; S^* begrenzt zwei Gebiete $\dot{T}^*$ und T^*, die entsprechend $\dot{P}$ und P enthalten. Der Berührungskegel im Nullpunkt, $17 x^2 - 7 y^2 - 8 z^2 = 0$, ist ein gerader elliptischer Kegel um die Gerade $y = z = 0$ als Achse. Die Niveauflächen $\mathring{U} < \frac{2\varkappa M}{D}$ bilden eine Schar sich ins Unendliche erstreckender Schalen und darüber hinaus, für kleine Werte der Differenz $\frac{2\varkappa M}{D} - \mathring{U}$, aus einer Schar ineinander geschachtelter, S^* umschließender, analytischer und regulärer, in bezug auf die drei Koordinatenebenen symmetrischer Flächen. Die Niveauflächen $\mathring{U} > \frac{2\varkappa M}{D}$ bilden zwei Scharen ineinandergeschachtelter analytischer und regulärer Flächen, die die drei Koordinatenebenen zu Symmetrieebenen haben, in T^* bzw. $\dot{T}^*$ enthalten sind und gegen P bzw. $\dot{P}$ konvergieren, darüber hinaus aber auch noch eine Schar ins Unendliche reichender zylinderartiger Flächen, um die wir uns nicht weiter zu kümmern brauchen. Wir haben uns im folgenden lediglich mit den geschlossenen Niveauflächen in T^*, $\dot{T}^*$ und in dem Außengebiete von $T^* + \dot{T}^*$ in der Nachbarschaft von S^* zu beschäftigen. Die diese Flächen betreffenden Behauptungen sind in der Hauptsache bewiesen, sobald gezeigt ist, daß in einem $T^* + \dot{T}^*$ ganz in seinem Innern enthaltenden

[125] Vgl. die Leipziger Inaugural-Dissertation von K. Maruhn, Ein Beitrag zur mathematischen Theorie der Gestalt der Himmelskörper. Math. Zeitschr. **33** (1931), S. 300—320, insb. S. 301 u. ff.

Bereiche B mit der einzigen Ausnahme des Koordinatenursprunges die Schwerkraft $\varkappa\bar{\dot{\psi}}$ nicht verschwindet[126]. Wie man leicht nachprüft, verhält sich $\varkappa\mathring{\psi}$ in der Umgebung von O wie $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$, präziser: es ist $\frac{\mathring{\psi}}{r}$ in $\dot{T}^* + \dot{S}^*$ und $T^* + S^*$ angebbar von Null verschieden. Werden, wie früher, mit a, b, c die Richtungskosinus der Normale an die Niveauflächen bezeichnet, so verhalten sich $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial c}{\partial z}$ in der Umgebung des Koordinatenursprunges wie r^{-1}.

Wie in **27.** des näheren ausgeführt worden ist, gibt es eine Figur des relativen Gleichgewichts, die aus den beiden Attraktionszentren P und $\dot{P}$ und aus zwei um diese herum in bezug auf den Koordinatenursprung symmetrisch gelegenen Flüssigkeitsmassen $\bar{T}$ und $\dot{\bar{T}}$ der Dichte f besteht. Die Randflächen $\bar{S}$ und $\dot{\bar{S}}$ von $\bar{T}$ und $\dot{\bar{T}}$ sind, sofern ihr Durchmesser $2\mathfrak{r}$, wie wir es tun wollen, klein im Verhältnis zu D angenommen wird, nur wenig von Kugeln um P und $\dot{P}$ als Mittelpunkt verschieden. Die Winkelgeschwindigkeit ω, mit der das Ganze um die z-Achse rotiert, ist nur wenig verschieden von $\left(\frac{\varkappa M}{4D^3}\right)^{\frac{1}{2}}$. Aus Gründen der Stetigkeit gelten sinngemäß auch jetzt noch alle qualitativen, im vorstehenden gemachten, die Äquipotentialflächen betreffenden Aussagen. Wir nennen nunmehr, um uns den im vierten Kapitel gebrauchten Bezeichnungen nach Möglichkeit anzunähern, die beiden in dem konischen Punkt zusammenhängenden Teile der singulären, S^* entsprechenden Niveaufläche einfach S und $\dot{S}$, die von S bzw. $\dot{S}$ und $\bar{S}$ bzw. $\dot{\bar{S}}$ begrenzten Gebiete Θ bzw. $\dot{\Theta}$. Des weiteren mögen mit T und $\dot{T}$ die beiden von S und $\dot{S}$ begrenzten endlichen Gebiete bezeichnet werden. Es sei schließlich χ eine in Θ und $\dot{\Theta}$ erklärte stetige, allenfalls abteilungsweise stetige Ortsfunktion, die auf jedem Paar zusammengehöriger Niveauflächen $S_\mathfrak{r}$ und $\dot{S}_\mathfrak{r}$[127] denselben konstanten Wert hat, auf S und $\dot{S}$ verschwindet und in jedem Stetigkeitsbereiche stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat.

Die soeben betrachtete aus zwei Flüssigkeitskörpern bestehende Gleichgewichtsfigur kann als *eine* die Gebiete T und $\dot{T}$ füllende Flüssigkeitsmasse der Dichte f, die in $\bar{T}$ einerseits, $\dot{\bar{T}}$ andererseits gleich der

---

[126] Vgl. K. Maruhn, loc. cit. [125], S. 304—305. Der Bereich B ist dort der von zwei Halbkugeln um P und $\dot{P}$ vom Radius D und von dem berührenden Kreiszylinder begrenzte konvexe Körper.

[127] Wir verstehen unter $\mathfrak{r}$ in Annäherung an die Bezeichnungsweise im vierten Kapitel den Abstand der in Θ gelegenen Schale der betrachteten Niveaufläche von dem Koordinatenursprung. Dieselbe Bedeutung hat $\mathfrak{r}$, wenn es sich um einschalige Niveauflächen in einer Umgebung von S und $\dot{S}$, die alsbald herangezogen werden, handelt.

Dichte der obigen Flüssigkeitskörper, in Θ und $\dot{\Theta}$ aber gleich Null ist, aufgefaßt werden. *Gibt es für hinreichend kleine Werte von* $|\alpha|$ *und* $\dot{\mathfrak{r}}$ *und passend gewählte* $\lambda = \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\varkappa}$ *eine Flüssigkeitskonfiguration* $T_1, \dot{T}_1$, *deren Dichte auf denjenigen Niveauflächen* $S_{\mathfrak{r}1}, \dot{S}_{\mathfrak{r}1}$, *deren Bilder in* $\overline{T}$ *bzw.* $\dot{\overline{T}}$ *liegen, gleich* f, *bei den übrigen aber gleich* $f + \alpha\chi$ *ist?* Diese Frage habe ich nach einem besonders gearteten Verfahren der sukzessiven Näherungen für den zweidimensionalen Fall im bejahenden Sinne beantwortet[128]. Im Anschluß daran hat Herr Maruhn in seiner in der Fußnote [126] genannten Dissertation zunächst die analoge Fragestellung in drei Dimensionen in allen Einzelheiten behandelt und darüber hinausgehend einige weitere interessante Ergebnisse gewonnen (vgl. S. 165).

Unser Problem gestattet, wie wir jetzt zeigen wollen, auch noch eine zu der im vierten Kapitel durchgeführten ganz analoge Behandlung; doch brauchen wir uns im vorliegenden Falle mit den im Innern von $\overline{T}$ und $\dot{\overline{T}}$ gelegenen Äquipotentialflächen nicht zu beschäftigen. Bezüglich der zu bestimmenden Ortsfunktion ζ ist zu fordern, daß sie sich in Θ und $\dot{\Theta}$ stetig verhält, die drei Koordinatenebenen zu Symmetrieebenen hat, in O verschwindet und beschränkte, außer höchstens in O, stetige, allenfalls abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt. Wird wie früher

$$(124)\qquad \left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right| \leqq \Omega$$

gesetzt, so gilt

$$(125)\qquad |\zeta| \leqq \sqrt{3}\, r\Omega \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2).$$

Die maßgebende Integro-Differentialgleichung folgt fast unmittelbar aus (43) IV, wenn man berücksichtigt, daß jetzt die Flüssigkeitskörper sich in dem Außenfelde $\varkappa\Gamma$ der beiden mitrotierenden Attraktionspunkte befinden, $\overline{S} + \dot{\overline{S}}$ die Rolle von $\mathfrak{S}$ übernimmt, $[f] = -f$ und $\frac{\partial f'}{\partial \nu'} = 0$ ist. Wir finden, unter $\varkappa\psi$ die dem Zusammenwirken der Flüssigkeitskörper $\overline{T}$ und $\dot{\overline{T}}$, der beiden Attraktionspunkte und der Zentrifugalkraft entspringende Schwerkraft verstanden,

$$(126)\qquad \psi\zeta + \int\limits_{\overline{S}+\dot{\overline{S}}} f' \frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' = s - \alpha \int\limits_{\Theta_1 + \dot{\Theta}_1} \chi' \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1' - \lambda\mathfrak{r}^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2 + b^2)$$
$$-2\lambda\zeta(ax + by) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{B}^{(2)} + \mathfrak{B}^{(3)} + \dots) - \frac{\zeta^2}{2!}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\nu^2} - \frac{\zeta^3}{3!}\frac{\partial^3\Gamma}{\partial\nu^3} - \dots \quad (\mathfrak{r}^2 = x^2 + y^2).\ [128a]$$

---

[128] Vgl. L. Lichtenstein, Kosmogonische Untersuchungen I. Eine aus zwei Einzelmassen, die einen Punkt gemeinsam haben, bestehende Gleichgewichtsfigur nichthomogener Flüssigkeit, Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften **80** (1928), S. 35—68.

[128a] In (126) bezeichnet $\chi' = \chi(\tau')$ den Wert der Dichte in dem τ_1' in $\Theta + \dot{\Theta}$ entsprechenden Punkte τ'.

Wie $\mathring{\psi}$ ist auch ψ in $\Theta + S$ und $\dot{\Theta} + \dot{S}$ mit der einzigen Ausnahme des Koordinatenursprunges von Null verschieden. Bei der Annäherung an O konvergiert ψ gegen Null, der Quotient $\frac{\psi}{r}$ ist in Θ und $\dot{\Theta}$ beschränkt und angebbar von Null verschieden.

Wir haben rechts $\mathfrak{V}^{(2)} + \mathfrak{V}^{(3)} + \ldots$ für $\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots$ geschrieben, unter $\mathfrak{V}^{(n)}$ den zu (53) III analogen, über $\bar{S}$ und $\dot{\bar{S}}$ erstreckten Integralausdruck verstanden, weil wir es jetzt, wie man unmittelbar feststellt, mit den Gliedern zweiter und höherer Ordnung des Ausdruckes $\int\limits_{\bar{T}_1 + \dot{\bar{T}}_1} f' \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1' - \int\limits_{\bar{T} + \dot{\bar{T}}} f' \frac{1}{\varrho} d\tau'$ zu tun haben. In dem Ausdruck (53) III ist übrigens diesmal der Aufpunkt auf einer beliebigen Niveaufläche in $\Theta + \dot{\Theta}$ und nicht wie s. Z. notwendigerweise auf $\bar{S}$ oder $\dot{\bar{S}}$ anzunehmen.

Es sei $\hat{S}$ eine einschalige Niveaufläche in der Nachbarschaft von S und $\dot{S}$. Das von S, $\dot{S}$ und $\hat{S}$ begrenzte Gebiet heiße $\hat{\Theta}$. Es ändert sich nichts, wenn wir $\hat{\Theta}$ mit in das System aufnehmen und das Bild $\hat{\Theta}_1$ von $\hat{\Theta}$ mit Masse der Dichte $\chi = 0$ uns erfüllt denken. Die Integro-Differentialgleichung (126) bleibt ungeändert, doch ist nunmehr die Ortsfunktion ζ in dem ganzen von S, $\dot{S}$ und $\hat{S}$ begrenzten Gebiet erklärt, und dieser Umstand erweist sich für den Konvergenzbeweis als zweckmäßig.

Einige weitere Bemerkungen: In der im vierten Kapitel entwickelten allgemeinen Theorie verhielten sich die Niveauflächen $S_{\mathfrak{r}}$ in der Umgebung des Ursprunges topologisch wie eine Schar ineinandergeschachtelter Kugeln, jetzt haben sie den Charakter ineinandergeschachtelter zweischaliger bzw. einschaliger Hyperboloide. Der Unterschied ist indessen, was die Aufstellung der Integro-Differentialgleichung des Problems und den Konvergenzbeweis anlangt, belanglos, — Hauptsache ist, daß die auf S. 95 angegebenen wesentlichen Beziehungen $\frac{\partial a}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial c}{\partial z} = O(r^{-1})$ auch jetzt gelten.

Das Verhalten des (der Gravitationswirkung der homogenen, $\bar{T} + \dot{\bar{T}}$ erfüllenden Flüssigkeit entsprungenen) Ausdruckes $\mathfrak{V}^{(2)} + \mathfrak{V}^{(3)} + \ldots$ in der Umgebung des Koordinatenursprunges bietet nicht die geringsten Schwierigkeiten dar. Die einzelnen Terme sind diesmal Integralausdrücke, erstreckt über $\bar{S} + \dot{\bar{S}}$.[129] Eine Sonderbehandlung erheischt

---

[129] Vgl. loc. cit. [75], S. 503. Die Formel (74) a. a. O. lautet jetzt, sinngemäß übertragen,

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{V}_u}{\partial x_u^2} = -\varkappa \int\limits_{\bar{S}_u + \dot{\bar{S}}_u} f' \frac{\partial}{\partial x_u}\left(\frac{1}{\varrho_u}\right) \cos(\nu_u', x)\, d\sigma_u',$$

da in T_u und $\dot{T}_u$ eben $\frac{\partial f_u'}{\partial x_u'} = 0$, auf S_u und $\dot{S}_u$ aber $[f_u'] = 0$ ist. Sie gilt für alle hinreichend kleinen Werte von r in $\Theta + S$ sowie $\dot{\Theta} + \dot{S}$.

demgegenüber, wie sich sogleich zeigen wird, das Volumintegral über $\Theta_1 + \overline{\Theta}_1$.

Wie an der mehrfach genannten Stelle (S. 105ff.) setzen wir, unter h einen kleinen Parameter verstanden, $s = {}_0s + hF(U(x,y,z)) - hF(U(0,0,0))$, woselbst U das Gesamtpotential der Ausgangsverteilung, F eine analytische und reguläre Funktion bezeichnet, und erhalten, indem wir τ nach O konvergieren lassen,

$$(127) \qquad \int\limits_{\overline{S}+\dot{\overline{S}}} f' \frac{1}{{}_0\varrho} \zeta' d\sigma' = {}_0s - \alpha \int\limits_{\Theta_1+\dot{\Theta}_1} \chi' \frac{1}{{}_0\varrho_1} d\tau_1' - \frac{1}{\varkappa} ({}_0\mathfrak{V}^{(2)} + {}_0\mathfrak{V}^{(3)} + \ldots),$$

darum ähnlich wie früher

$$(128) \quad \psi\zeta + \int\limits_{\overline{S}+\dot{\overline{S}}} f' \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) \zeta' d\sigma' = hF(U(x,y,z)) - hF(U(0,0,0))$$

$$- \alpha \int\limits_{\Theta_1+\dot{\Theta}_1} \chi' \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{{}_0\varrho_1}\right) d\tau_1' - \lambda \mathfrak{r}^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa} \zeta^2 (a^2+b^2) - 2\lambda\zeta(ax+by)$$

$$- \frac{1}{\varkappa}\{(\mathfrak{V}^{(2)} + \mathfrak{V}^{(3)} + \ldots) - ({}_0\mathfrak{V}^{(2)} + {}_0\mathfrak{V}^{(3)} + \ldots)\} - \frac{\zeta^2}{2!} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \nu^2} - \frac{\zeta^3}{3!} \frac{\partial^3 \Gamma}{\partial \nu^3} - \cdots$$

Es wird dabei angenommen, daß auf $\overline{S}$ und $\dot{\overline{S}}$ gewiß $F(U)$ von $F(U(0,0,0))$ verschieden ist.

Wir setzen

$$(129) \quad \begin{gathered} \int\limits_{\Theta_1+\dot{\Theta}_1} \chi' \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1' = \int\limits_{\Theta+\dot{\Theta}} \chi' \frac{1}{\varrho} d\tau' + \mathfrak{W}^{(1)} + \mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots, \\ (\mathfrak{W}^{(1)} + \mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots) - ({}_0\mathfrak{W}^{(1)} + {}_0\mathfrak{W}^{(2)} + {}_0\mathfrak{W}^{(3)} + \ldots) = \mathfrak{H}, \end{gathered}$$

unter ${}_0\mathfrak{W}^{(n)}$ den Wert des in Frage kommenden Integralausdruckes im Koordinatenursprunge verstanden. Durch Betrachtungen, die den im vierten Kapitel (S. 104) erwähnten ganz ähnlich verlaufen, überzeugen wir uns, daß

$$(130) \qquad \left|\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{H}\right|, \left|\frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{H}\right|, \left|\frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{H}\right| \leqq \beta^* r \Omega, \qquad |\mathfrak{H}| \leqq \sqrt{3}\,\beta^* r^2 \Omega$$

gilt. Wesentlich ist hierbei die Formel (74) S. 503 loc. cit. [75], die sinngemäß übertragen wegen $\chi = 0$ auf S und $\dot{S}$, somit auch auf S_u und $\dot{S}_u$ diesmal lautet

$$(131) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{W}_u}{\partial x_u^2} = \varkappa \int\limits_{\Theta_u+\dot{\Theta}_u} \frac{\partial \chi_u'}{\partial x_u'} \frac{\partial}{\partial x_u} \left(\frac{1}{\varrho_u}\right) d\tau_u' + \varkappa \int\limits_{\overline{S}_u+\dot{\overline{S}}_u} \chi_u' \frac{\partial}{\partial x_u}\left(\frac{1}{\varrho_u}\right) \cos(\nu_u', x)\, d\sigma_u'.$$

Sie gilt im Innern von Θ_u und $\dot{\Theta}_u$ sowie auf den Randflächen S_u und $\dot{S}_u$, sofern r hinreichend klein ist. Nach Voraussetzung ist der Durchmesser der Flächen $\overline{S}$ und $\dot{\overline{S}}$ klein gegenüber ihrem Abstande. Wir schaffen darum, indem wir uns auf die Bestimmung von ζ in Θ und auf $\overline{S}$ be-

schränken, was aus Gründen der Symmetrie erlaubt ist, das Integral $\int\limits_{\bar{S}+\dot{S}} f'\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{{}_0\varrho}\right)\zeta' d\sigma'$ als eine kleine Größe höherer Ordnung nach rechts.

Die Beziehung

$$
\begin{aligned}
(132)\qquad \psi\zeta = &-\int\limits_{\bar{S}+\dot{S}} f'\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{{}_0\varrho}\right)\zeta' d\sigma' + hF(U(x,y,z)) - hF(U(0,0,0)) \\
&-\alpha\int\limits_{\Theta_1+\dot{\Theta}_1} \chi'\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{{}_0\varrho_1}\right)d\tau_1' - \lambda\mathfrak{r}^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2) - 2\lambda\zeta(ax+by) \\
&-\frac{1}{\varkappa}\{(\mathfrak{V}^{(2)}+\mathfrak{V}^{(3)}+\ldots)-({}_0\mathfrak{V}^{(2)}+{}_0\mathfrak{V}^{(3)}+\ldots)\} - \frac{\zeta^2}{2!}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\nu^2} - \frac{\zeta^3}{3!}\frac{\partial^3\Gamma}{\partial\nu^3} - \ldots,
\end{aligned}
$$

die der Gleichung (72) IV entspricht, bildet die Grundlage für das nunmehr einsetzende Verfahren der sukzessiven Approximationen. Führt man rechter Hand für ζ die n-te Näherung $\overset{n}{\zeta}$ ein, so erhält man ohne Auflösung einer linearen Integralgleichung linker Hand $\psi\overset{n+1}{\zeta}$. Man überzeugt sich ohne wesentliche Schwierigkeiten, daß $\overset{n+1}{\zeta}$ beschränkte, in $\Theta+\dot{\Theta}$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat und auf $S+\dot{S}$ verschwindet, sofern $\overset{n}{\zeta}$ die gleiche Eigenschaft hat. Neben den vorhin auseinandergesetzten Eigenschaften des über $\Theta_1+\dot{\Theta}_1$ erstreckten Volumintegrals und der geschweiften Klammer in (132) kommt hierbei die Tatsache zur Verwendung, daß

$$
(133)\qquad \frac{\zeta^2}{2!}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\nu^2} + \frac{\zeta^3}{3!}\frac{\partial^3\Gamma}{\partial\nu^3} + \ldots = \underset{\sim}{\Pi}\{\zeta\}
$$

Beziehungen von der Form

$$
(134)\qquad \left|\frac{\partial}{\partial x}\underset{\sim}{\Pi}\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial y}\underset{\sim}{\Pi}\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial z}\underset{\sim}{\Pi}\right| \leqq \underset{\sim}{\alpha}\Omega^2 r, \qquad |\underset{\sim}{\Pi}\{\zeta\}| \leqq \underset{\sim}{\alpha}\sqrt{3}\,\Omega^2 r^2
$$

genügt.

Der Konvergenzbeweis bietet gegenüber den in Frage kommenden Betrachtungen des vierten Kapitels nicht unerhebliche Vereinfachungen dar. Neben der bekannten schon früher benutzten Ungleichheiten werden hierbei die weiteren Beziehungen

$$
(135)\qquad
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial x}(\underset{\sim}{\Pi}\{\zeta\}-\underset{\sim}{\Pi}\{\hat{\zeta}\})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial z}(\underset{\sim}{\Pi}\{\zeta\}-\underset{\sim}{\Pi}\{\hat{\zeta}\})\right| &\leqq \underset{\sim}{\beta}\,\Omega\,\mho\, r, \\
|\underset{\sim}{\Pi}\{\zeta\}-\underset{\sim}{\Pi}\{\hat{\zeta}\}| &\leqq \underset{\sim}{\beta}\sqrt{3}\,\Omega\,\mho\, r^2,
\end{aligned}
$$

wo $\hat{\zeta}$ eine ganz wie ζ beschaffene Ortsfunktion bezeichnet, verwendet. Es gilt weiter

$$
(136)\qquad
\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial y}\right|,\ \left|\frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq \Omega, \\
&\left|\frac{\partial}{\partial x}(\zeta-\hat{\zeta})\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial y}(\zeta-\hat{\zeta})\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial z}(\zeta-\hat{\zeta})\right| \leqq \mho.
\end{aligned}
$$

Es ist ferner zu beachten, daß sich Γ auf $\bar{S}$ im wesentlichen ganz wie die in **27.** ebenso bezeichnete Funktion auf S verhält. Bei der Bestimmung von ζ auf S (vgl. S. 105ff.) kommt eine zu (121*) analoge quadratische Gleichung zur Verwendung.

Ist ζ einmal gefunden, so gilt es wie in **27.**, ω_1, d. h. λ so zu bestimmen daß auch die zweite Bedingung des Gleichgewichts (vgl. S. 158) erfüllt ist.

Vorhin ist angenommen worden, die beiden Massen P und $\dot{P}$ seien einander gleich. Ist $\dot{M} > M$, so rückt der Schwerpunkt O, durch den die Rotationsachse hindurchgeht, nach $\dot{P}$ hin. Der Librationspunkt, d. h. derjenige Punkt, in dem die Gesamtschwerkraft verschwindet, liegt diesmal zwischen O und P. Der Existenzbeweis wäre mit einiger Vorsicht mutatis mutandis wie vorstehend zu führen[130], dürfte aber zunächst, außer wenn $\frac{\dot{M} - M}{M}$ als klein aufgefaßt werden kann, einige Schwierigkeiten darbieten.

Maruhn betrachtet in seiner Dissertation auch die beiden Fälle, daß 1. die Körper Θ und $\dot{\Theta}$ zur Außenbegrenzung die beiden ganz im Innern von T^* und $\dot{T}^*$ gelegenen Schalen der zu einem Werte $\mathring{U} > \frac{2\varkappa M}{D}$ gehörigen Äquipotentialfläche haben, 2. daß die Ausgangskonfiguration von einer einschaligen Niveaufläche $\left(\mathring{U} < \frac{2\varkappa M}{D}\right)$ begrenzt ist. Der zuerst genannte Fall bietet, da diesmal der singuläre Punkt im Koordinatenursprung fortfällt, wesentliche Vereinfachungen dar. Die Voraussetzung, χ sei auf dem Rande gleich Null, erweist sich in beiden Fällen als überflüssig. Schließlich gelingt es, eine lineare Reihe von Gleichgewichtsfiguren der hier betrachteten Art zu konstruieren, die von *einer* Flüssigkeitsmasse über zwei in einem Punkte zusammenhängende Massen zu zwei getrennten Massen führt. Die kosmogonische Interpretation eines solchen Modells ist naheliegend. Insbesondere entspricht die im vorstehenden näher betrachtete Gleichgewichtsfigur einem Satelliten, der im Begriff ist, sich von dem Körper des Mutterplaneten zu trennen. Alle vorstehenden Ergebnisse kann man ohne Schwierigkeiten auch unter Zugrundelegung des vorhin auseinandergesetzten Verfahrens gewinnen.

In Weiterverfolgung seiner Betrachtungen hat Maruhn die Existenz einer anderen mit der vorstehenden verwandten linearen Reihe von Gleichgewichtsfiguren, die als Modell der von Laplace postulierten Ringbildung dienen kann, bewiesen[131]. Die dünne Atmosphäre ist um eine

---

[130] Vgl. eine demnächst voraussichtlich in der Math. Zeitschrift erscheinende Arbeit von Herrn Maruhn.

[131] Vgl. K. Maruhn, Über den Laplaceschen Ringkörper. Math. Zeitschr. **36** (1932), S. 122—142.

ringförmige Gleichgewichtsfigur mit Zentralkörper ausgebreitet, deren Existenz von Garten bewiesen wurde[132].

Auf alle in dieser Nummer besprochenen Probleme hatte ich bereits in meiner im S.-Semester 1928 gehaltenen Vorlesung über kosmogonische Hypothesen hingewiesen.

29. Der Laplacesche Urkörper. In dem Koordinatenursprung O eines kartesischen Achsenkreuzes x-y-z möge sich ein punktförmiges Attraktionszentrum der Masse M befinden, das mit dem Achsenkreuz starr verbunden und mit diesem zusammen in einer gleichförmigen Rotation um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω begriffen ist. Das Gesamtpotential der Gravitations- und der Zentrifugalkräfte hat den Wert

$$U = \frac{\varkappa M}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2), \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{137}$$

der absolute Betrag der Schwerkraft in der Ebene $y = 0$ den Wert

$$\left[\left(\varkappa M \frac{x}{r^3} - \omega^2 x\right)^2 + \left(\varkappa M \frac{z}{r^3}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{138}$$

Beschreibt man von O ausgehend die positive Hälfte der x-Achse, so nimmt (138) zunächst, mit dem Wert $+\infty$ beginnend, monoton ab, verschwindet im Punkte $P_0 = (l, 0, 0)$, $l = \left(\frac{\varkappa M}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ und wächst wieder monoton ins Unendliche. Im Punkte P_0 findet ein Richtungswechsel der Schwerkraft statt. Übrigens ist, wie man leicht sieht, (138) in dem Gesamtraume nur auf dem Kreise $C_0 : x^2 + y^2 = l^2$, $z = 0$ gleich Null.

Augenscheinlich haben alle Niveauflächen $U = \mathfrak{c}$ der Anordnung die Gerade $x = 0$, $y = 0$ zur Achse einer Rotationssymmetrie. Sie sind ferner in bezug auf die Ebene $z = 0$ symmetrisch. Die Niveaufläche

$$\frac{\varkappa M}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \frac{3\varkappa M}{2l} = c_0 \tag{139}$$

besteht aus zwei (in bezug auf die Ebene $z = 0$ symmetrisch gelegenen) analytischen und regulären, sich ins Unendliche erstreckenden Flächenschalen, die sich längs des Kreises C_0 treffen und den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ miteinander einschließen. Sie begrenzen einen ganz im Endlichen gelegenen linsenförmigen Bereich T sowie drei nichtbeschränkte Bereiche. Nur der zuerst genannte Bereich ist für die weiteren Betrachtungen von Interesse. Durch jeden Punkt P der Strecke OP_0 geht eine ganz bestimmte Niveaufläche $U = \mathfrak{c}$ $(\mathfrak{c} > c_0)$ hindurch. Die Gesamtheit dieser Niveauflächen bildet eine Schar ineinander geschachtelter, geschlossener, analytischer und regulärer Rotationsflächen, die den Raum T einfach und lückenlos erfüllen und für $\mathfrak{c} \to +\infty$ gegen O konvergieren, sowie eine

---

[132] Vgl. V. Garten, loc. cit. [116], S. 726—745.

weitere Schar sich ins Unendliche erstreckender Schalen, die für das Folgende nicht in Betracht kommen. Es sei $\mathfrak{r}$ der Abstand der Punkte P und P_0, wir bezeichnen die durch P bestimmte (in T gelegene) Äquipotentialfläche mit $S_\mathfrak{r}$.

Wie sich ohne Mühe zeigen läßt, ist die Schwerkraft auf dem Rande S von T, ja für alle $r = l$, außer auf C_0 von Null verschieden, und zwar nach innen gerichtet. Da, wie vorhin bemerkt, die Schwerkraft außer auf C_0 durchweg von Null verschieden ist, so ist sie auch auf $S_\mathfrak{r}$ für alle $l > \mathfrak{r} > 0$ nach innen gerichtet. Den üblichen Festsetzungen gemäß schreiben wir in T bzw. für alle $r < l$ in der Ebene $y = 0$

$$(140) \qquad \varkappa\psi = -\left[\left(\varkappa M\frac{x}{r^3} - \omega^2 x\right)^2 + \left(\varkappa M\frac{z}{r^3}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < 0 \qquad ((l-x)^2 + z^2 > 0).$$

Bei der Annäherung an C_0, gleichgültig ob von innen oder von außen von T ($r < l$ gesetzt), wird ψ null, und zwar verhält sich ψ wie der Abstand $\boldsymbol{r}$ des Punktes (x, y, z) von C_0,

$$\boldsymbol{r}^2 = [l - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}]^2 + z^2.$$

Genauer liegt $\frac{|\psi|}{\boldsymbol{r}}$ oberhalb einer positiven Schranke[133]. Es sei $0 < \bar{l} < l$ beliebig gewählt, und es möge $\bar{T}$ den von $S_{\bar{l}} = \bar{S}$ begrenzten Körper bezeichnen. Es sei $\bar{\mathfrak{c}}$ der Wert des Gesamtpotentials U auf $\bar{S}$, und es möge $F(u)$ eine beliebige in dem Intervalle $\langle 0, \bar{\mathfrak{c}} - c_0\rangle$ erklärte, einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\nu < 1$ genügende, für $u = 0$ verschwindende Funktion bezeichnen. Die in dem von S und $\bar{S}$ begrenzten Bereiche $\tilde{T}$ erklärte Funktion $F\{U(x, y, z) - c_0\}$ ist daselbst stetig, verschwindet auf S und erfüllt, wie man leicht sieht, eine H-Bedingung. Es sei schließlich

$$(141) \qquad \chi(\tau) = \begin{cases} F\{U(x, y, z) - c_0\} & \text{für alle } \tau \text{ in } \tilde{T}, \\ F(\bar{\mathfrak{c}} - c_0) & \text{in } \bar{T}. \end{cases}$$

Nach diesen Vorbereitungen versuchen wir die Existenz einer Gleichgewichtskonfiguration zu beweisen, die aus einem punktförmigen Attraktionszentrum der Masse $M_1 = (1 - \beta)M$ in O, unter β einen zu bestimmenden hinreichend kleinen, positiven Wert verstanden, und einer Flüssigkeitsverteilung besteht, über die folgendes festgesetzt wird: Sie erfüllt ein Gebiet T_1, das die gleichen topologischen und Symmetrieeigenschaften wie T hat und aus T durch eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung von der Form

$$(142) \qquad x_1 = x + a\zeta, \quad y_1 = y + b\zeta, \quad z_1 = z + c\zeta$$

entsteht, unter a, b, c wie früher die Richtungskosinus der Außen-

[133] Man vergleiche hierzu bsp. G. Tisserand, Traité de mécanique céleste, Bd. IV, Paris 1896, S. 233—237. Siehe auch K. Maruhn, Über den von Laplace postulierten Urkörper, Math. Zeitschr. **37** (1933), S. 463—478.

normale zu $S_\mathfrak{r}$ verstanden. Die Flüssigkeitsdichte hat in dem τ durch (142) zugeordneten Punkte τ_1 den Wert $\alpha\chi(\tau)$, unter α einen hinreichend kleinen festen Wert verstanden. Da χ in dem Bildgebiete von $\overline{T}$ den festen Wert $F(\mathfrak{c}-c_0)$ hat, so ist es für das Folgende gleichgültig, welchen Wert ζ in $\overline{T}$ hat. Wir können uns darum auf die Bestimmung von ζ in $\tilde{T}$ beschränken. Wir nehmen an, daß ζ sich im Innern und auf dem Rande von $\tilde{T}$ stetig verhält, auf C_0 verschwindet, die Gerade $x=y=0$ zur Achse einer Rotationssymmetrie und die Ebene $z=0$ zur Symmetrieebene hat. Des weiteren hat ζ beschränkte und außer höchstens auf C_0 stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Schließlich gelten Ungleichheiten von der Form

$$\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right| \leqq \varepsilon, \quad \text{darum auch} \quad |\zeta| \leqq \sqrt{3}\,\varepsilon\boldsymbol{r}, \tag{143}$$

unter ε einen hinreichend kleinen Wert verstanden. Wie man sich ohne Mühe überzeugt, wird tatsächlich durch (142) eine topologische Abbildung vermittelt. Wie man sich leicht überzeugt, werden übrigens $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial c}{\partial z}$ (in T) in der Umgebung von C_0 wie $\boldsymbol{r}^{-1}$ unendlich. Die Winkelgeschwindigkeit der gesuchten Gleichgewichtsanordnung sei wieder ω.

Die Integro-Differentialgleichung des Problems ergibt sich durch sinngemäße Anwendung der in dem vierten Kapitel angewandten Schlüsse. Es gilt für alle τ in $\tilde{T}$

$$U(x,y,z) = \frac{\varkappa M}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2),$$

$$U_1(x_1,y_1,z_1) = \frac{\varkappa M}{r_1} + \frac{\omega^2}{2}(x_1^2+y_1^2) + \varkappa\alpha\int\limits_{T_1}\frac{\chi(\tau')}{\varrho_1}\,d\tau_1' - \beta\frac{\varkappa M}{r_1}$$

und mit

$$U_1(x_1,y_1,z_1) = U(x,y,z) + \varkappa_0 s$$

weiter

$$\varkappa M\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right) + \frac{\omega^2}{2}[(x_1^2+y_1^2)-(x^2+y^2)] + \varkappa\alpha\int\limits_{T_1}\frac{\chi(\tau')}{\varrho_1}\,d\tau_1' - \beta\frac{\varkappa M}{r_1} = \varkappa_0 s. \tag{144}$$

Beachtet man, daß

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \zeta\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\zeta^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \ldots,$$

$$\frac{\omega^2}{2}[(x_1^2+y_1^2)-(x^2+y^2)] = \omega^2\mathfrak{r}\boldsymbol{\tau}\zeta + \frac{\omega^2}{2}(a^2+b^2)\zeta^2, \qquad \mathfrak{r}^2 = x^2+y^2,$$

$$\varkappa M\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}\right) + \omega^2\mathfrak{r}\boldsymbol{\tau} = \varkappa\psi$$

gilt, so findet man

$$\psi\zeta = {}_0s - M\left[\frac{\zeta^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\zeta^3}{3!}\frac{\partial^3}{\partial\nu^3}\left(\frac{1}{r}\right) + \ldots\right] \tag{145}$$
$$- \frac{\omega^2}{2\varkappa}(a^2+b^2)\zeta^2 - \alpha\int\limits_{T_1}\frac{\chi(\tau')}{\varrho_1}\,d\tau_1' + \beta\frac{M}{r_1} = \mathring{\Pi}\{\zeta\}.$$

Wir setzen zur Vereinfachung

$$-\alpha\int_{T_1}\frac{\chi(\tau')}{\varrho_1}\,d\tau_1'+\beta\frac{M}{r_1}=\overset{1}{\Pi}\{\zeta\}. \tag{146}$$

Aus Gründen der Symmetrie ist in P_0 für alle α und β (auch $\alpha\neq 0$, $\beta=0$) $\frac{\partial}{\partial y_1}\overset{1}{\Pi}\{\zeta\}=\frac{\partial}{\partial z_1}\overset{1}{\Pi}\{\zeta\}=0$, indessen ist im Gegensatz zu den Betrachtungen des vierten Kapitels für beliebige α und β im allgemeinen nicht auch $\frac{\partial}{\partial x_1}\overset{1}{\Pi}\{\zeta\}=0$, so daß $\overset{1}{\Pi}\{\zeta\}$ sich in der Umgebung von C_0 (in T_1) nicht wie Const. $+O(\boldsymbol{r}_1^2)=$ Const. $+O(\boldsymbol{r}^2)$ ($\boldsymbol{r}_1^2=[l-(x_1^2+y_1^2)^{\frac{1}{2}}]^2+z_1^2$ verhält. Dasselbe gilt augenscheinlich für $\overset{0}{\Pi}\{\zeta\}$. Es lassen sich aber bei beliebigem α aus (144) ${}_0s$ und β mit Leichtigkeit so bestimmen, daß in $P_0\ldots\overset{1}{\Pi}\{\zeta\}=0$, $\frac{\partial}{\partial x_1}\overset{1}{\Pi}\{\zeta\}=0$ (und darum auch $\frac{\partial}{\partial x}\overset{0}{\Pi}\{\zeta\}=0$) wird. Um dies zu erreichen, ist eben der Parameter β eingeführt worden[134].

Wir setzen, unter ${}_0\varrho_1$ den Abstand des Punktes $\tau_1'=(x_1',y_1',z_1')$ von P_0 verstanden,

$${}_0s=\alpha\int_{T_1}\frac{\chi(\tau')}{{}_0\varrho_1}\,d\tau_1'-\beta\frac{M}{l} \tag{147}$$

und erreichen damit, daß $\overset{0}{\Pi}\{\zeta\}$ in P_0 und damit zugleich überall auf C_0 verschwindet. Des weiteren soll in $P_0\ldots\frac{\partial}{\partial x_1}\overset{1}{\Pi}\{\zeta\}=0$ gleich Null sein. Dies liefert nach (146)

$$\beta M=-\alpha l^2\int_{T_1}\frac{x_1'-l}{{}_0\varrho_1^3}\,\chi(\tau')\,d\tau_1'. \tag{148}$$

Aus (145), (147), (148) ergibt sich nach einer leichten Umformung die weitere Beziehung

$$\begin{aligned}\psi\zeta=&-M\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\left(\frac{1}{r}\right)\zeta^2+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial\nu^3}\left(\frac{1}{r}\right)\zeta^3+\ldots\right]-\frac{\omega^2}{2\varkappa}(a^2+b^2)\,\zeta^2\\ &-\alpha\int_{T_1}\left\{\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{{}_0\varrho_1}-\frac{x_1'-l}{{}_0\varrho_1^3}(x_1-l)\right\}\chi(\tau')\,d\tau_1'\\ &-\alpha l^2\int_{T_1}\frac{x_1'-l}{{}_0\varrho_1^3}\,\chi(\tau')\,d\tau_1'\cdot\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{l}+\frac{x_1-l}{l^2}\right).\end{aligned} \tag{149}$$

Man verifiziert leicht, daß, wenn ζ sich wie eingangs angenommen verhält, die rechte Seite von (149) in P_0 wie $\boldsymbol{r}^2$ verschwindet.

Die Auflösung der Integro-Differentialgleichung (149) durch suk-

[134] Auf den Gedanken, in Analogie zu den Entwicklungen des vierten Kapitels (S. 105 ff.) die Beziehung: $\frac{\partial}{\partial x}\overset{0}{\Pi}\{\zeta\}=0$ in P_0 wie oben zu erzwingen, bin ich durch eine Unterhaltung mit Herrn E. Hölder, der eine ähnliche Wendung für andere Zwecke (vgl. die Fußnote [101]) in Aussicht genommen hatte, gekommen.

zessive Approximationen bietet keinerlei Schwierigkeiten dar. Wir setzen

$$
(150)\qquad \psi\overset{1}{\zeta} = -\alpha\int\limits_{T}\left\{\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho} - \frac{x'-l}{{}_0\varrho^3}(x-l)\right\}\chi(\tau')\,d\tau'
- \alpha l^2\int\limits_{T}\frac{x'-l}{{}_0\varrho^3}\,\chi(\tau')\,d\tau'\cdot\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l} + \frac{x-l}{l^2}\right)
$$

und für alle $n>1$ in Anlehnung an die S. 107 ff. gebrauchte Schreibweise

$$
(151)\qquad \begin{aligned}
\psi\overset{n}{\zeta} = &-M\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\left(\frac{1}{r}\right)(\overset{n-1}{\zeta})^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial\nu^3}\left(\frac{1}{r}\right)(\overset{n-1}{\zeta})^3 + \dots\right] - \frac{\omega^2}{2}(a^2+b^2)(\overset{n-1}{\zeta})^2 \\
&-\alpha\int\limits_{\overset{n-1}{T}}\left\{\frac{1}{\overset{n-1}{\varrho}} - \frac{1}{{}_0\overset{n-1}{\varrho}} - \frac{\overset{n-1}{x}{}' - l}{({}_0\overset{n-1}{\varrho})^3}(\overset{n-1}{x} - l)\right\}\overset{n-1}{\chi}(\overset{n-1}{\tau}{}')\,d\overset{n-1}{\tau}{}' \\
&-\alpha l^2\int\limits_{\overset{n-1}{T}}\frac{\overset{n-1}{x}{}'-l}{({}_0\overset{n-1}{\varrho})^3}\,\overset{n-1}{\chi}(\overset{n-1}{\tau}{}')\,d\overset{n-1}{\tau}{}'\left(\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{l} + \frac{\overset{n-1}{x}-l}{l^2}\right) = \overset{2}{\Pi}\{\overset{n-1}{\zeta}\},
\end{aligned}
$$

$$
(152)\qquad \begin{aligned}
&\overset{n-1}{x} = x + a\overset{n-1}{\zeta}, \quad \overset{n-1}{y} = y + b\overset{n-1}{\zeta}, \quad \overset{n-1}{z} = z + c\overset{n-1}{\zeta}, \\
&(\overset{n-1}{r})^2 = (\overset{n-1}{x})^2 + (\overset{n-1}{y})^2 + (\overset{n-1}{z})^2 \quad \overset{n-1}{\chi}(\overset{n-1}{\tau}{}') = \chi(\tau').
\end{aligned}
$$

Es möge $\overset{n-1}{\zeta}$ im Innern und auf dem Rande von $\tilde{T}$ stetig sein, auf C_0 verschwinden und beschränkte, außer höchstens auf C_0 stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Ferner sei

$$
(153)\qquad \left|\frac{\partial\overset{n-1}{\zeta}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\overset{n-1}{\zeta}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial\overset{n-1}{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq \varepsilon, \quad \text{darum } |\overset{n-1}{\zeta}| \leqq \varepsilon\boldsymbol{r}.
$$

Durch die in $\tilde{T}$ erklärte topologische Abbildung (152) wird $\tilde{T}$ ein von zwei Randflächen $\overset{n-1}{S}$ und $\overset{n-1}{\bar{S}}$, den Bildern von S und $\bar{S}$, begrenzter Bereich $\overset{n-1}{\tilde{T}}$ zugeordnet. Fügt man diesem Bereich das von $\overset{n-1}{S}$ begrenzte endliche Gebiet hinzu, so erhält man den Bereich, der in (151) mit $\overset{n-1}{T}$ bezeichnet worden ist. Was die Funktion $\overset{n-1}{\chi}$ betrifft, so hat sie in dem Bildpunkte $\overset{n-1}{\tau}$ von τ für alle τ in $\tilde{T}$ den Wert $\chi(\tau)$, in allen anderen Punkten von $\overset{n-1}{T}$ den festen Wert $F\{\bar{c} - c_0\}$. Offenbar erfüllt $\overset{n-1}{\chi}$ in $\overset{n-1}{T}$ eine H-Bedingung und verschwindet auf $\overset{n-1}{\bar{S}}$. Denkt man sich die Funktion $\overset{n-1}{\chi}$ dadurch über $\overset{n-1}{T}$ hinaus fortgesetzt, daß man sie außerhalb von $\overset{n-1}{T}$ gleich Null setzt, so wird sie *überall* eine H-Bedingung erfüllen. Augenscheinlich steht jetzt nichts im Wege, in (151) die Integration statt über $\overset{n-1}{T}$ über einen beliebigen, hinreichenden großen Kugelkörper um den Koordinatenursprung zu erstrecken.

Nach bekannten Sätzen (vgl. **1.**, 3) hat der dritte Summand in (151) rechts, $\Lambda\{\overset{n-1}{\zeta}\}$, in $\overset{n-1}{T} + \overset{n-1}{S}$ stetige (einer H-Bedingung genügende) partielle

Ableitungen zweiter Ordnung und verschwindet nebst seinen Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial}{\partial \overset{n-1}{x}} \Lambda$, $\frac{\partial}{\partial \overset{n-1}{y}} \Lambda$, $\frac{\partial}{\partial \overset{n-1}{z}} \Lambda$ in P_0, darum auch überall auf C_0. Augenscheinlich verhalten sich Λ; $\frac{\partial}{\partial \overset{n-1}{x}} \Lambda$, $\frac{\partial}{\partial \overset{n-1}{y}} \Lambda$, $\frac{\partial}{\partial \overset{n-1}{z}} \Lambda$ in der Umgebung von C_0 entsprechend wie $(\overset{n-1}{\boldsymbol{r}})^2$ bzw. $\overset{n-1}{\boldsymbol{r}}$. Die partiellen Ableitungen

$$(154) \qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \Lambda\{\overset{n-1}{\zeta}\} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \overset{n-1}{x}} \frac{\partial \overset{n-1}{x}}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \overset{n-1}{y}} \frac{\partial \overset{n-1}{y}}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \overset{n-1}{z}} \frac{\partial \overset{n-1}{z}}{\partial x}, \ldots$$

verschwinden bei der Annäherung an C_0 in $\tilde{T}$ wie $\overset{n-1}{\boldsymbol{r}}$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wie $\boldsymbol{r}$. Die drei anderen Summanden in (151) rechts haben die gleichen Eigenschaften. Man sieht jetzt leicht, daß $\overset{n}{\zeta}$, $\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial x}$, $\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial y}$, $\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial z}$ sich, was ihre Stetigkeitseigenschaften betrifft, wie $\overset{n-1}{\zeta}$, $\frac{\partial \overset{n-1}{\zeta}}{\partial x}$, $\frac{\partial \overset{n-1}{\zeta}}{\partial y}$, $\frac{\partial \overset{n-1}{\zeta}}{\partial z}$ verhalten. Gelingt es noch zu beweisen, daß

$$(155) \qquad \left|\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq \varepsilon$$

ist, so wird damit gezeigt sein, da nach (150) diese Eigenschaft für hinreichend kleine $|\alpha|$ der Funktion $\overset{1}{\zeta}$ zukommt, daß sich der Iterationsprozeß der sukzessiven Näherungen unbegrenzt fortsetzen läßt.

Es sei

$$(156) \qquad |\alpha| \leqq \Omega_1, \quad \left|\frac{\partial \overset{n-1}{\zeta}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n-1}{\zeta}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n-1}{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq \Omega \leqq \varepsilon,$$

darum auch

$$(157) \qquad |\overset{n-1}{\zeta}| \leqq \sqrt{3}\,\Omega \boldsymbol{r}.$$

Wie man sich ohne große Mühe überzeugt, ist in $\tilde{T}$

$$(158) \qquad \left|\frac{\partial}{\partial x} \frac{\overset{(2)}{\Pi}\{\overset{n-1}{\zeta}\}}{\psi(\tau)}\right|, \left|\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\overset{2}{\Pi}}{\psi}\right)\right|, \left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\overset{2}{\Pi}}{\psi}\right)\right| \leqq \boldsymbol{C}(\Omega_1 + \Omega^2),$$

mithin auch

$$(159) \qquad \left|\frac{\overset{2}{\Pi}}{\psi}\right| \leqq \boldsymbol{C}(\Omega_1 + \Omega^2)\sqrt{3}\,\boldsymbol{r}.$$

Von den Ungleichheiten (158) und (159) ausgehend läßt sich jetzt wie in **9.** beweisen, daß sich für $\left|\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial y}\right|$, $\left|\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial z}\right|$ $(n = 1, 2, \ldots)$, sobald Ω_1 als hinreichend klein, etwa $\leqq d_1$ angenommen wird, wie verlangt, eine gemeinsame obere Schranke $\leqq \varepsilon$ angeben läßt[135]. Man gelangt hierzu

[135] Übrigens konvergiert diese Schranke zugleich mit Ω_1 gegen Null.

durch Betrachtung der quadratischen Gleichung

$$\pi = C(\Omega_1 + \pi^2)\,. \quad (160)$$ [136]

Es sei ζ eine wie vorhin beschaffene, den Ungleichheiten (143) genügende Ortsfunktion in $\tilde{T}$, und es möge $\dot{\zeta}$ eine hierzu analoge Funktion bezeichnen. Schließlich sei in $\tilde{T}$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(\dot{\zeta}-\zeta)\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial y}(\dot{\zeta}-\zeta)\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial z}(\dot{\zeta}-\zeta)\right| \leqq \mho \leqq \frac{1}{2}\Omega, \quad (161)$$

darum

$$|\dot{\zeta}-\zeta| \leqq \sqrt{3}\,\mho\, r\,. \quad (162)$$

Es gilt dann, wie sich durch einen naheliegenden Ausbau der loc. cit. [75] S. 499ff. durchgeführten Betrachtungen zeigen läßt,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\psi(\tau)}\left(\overset{2}{\Pi}\{\dot{\zeta}\} - \overset{2}{\Pi}\{\zeta\}\right)\right]\right|,\ \ldots \leqq D\,\mho\,(\Omega+\Omega_1)\,, \quad (163)$$ [137]

somit auch

$$\frac{1}{\psi(\tau)}\left(\overset{2}{\Pi}\{\dot{\zeta}\} - \overset{2}{\Pi}\{\zeta\}\right) \leqq D\,\sqrt{3}\,\mho\,(\Omega+\Omega_1)\,r\,. \quad (164)$$

Die Beziehungen (163), (164), die zu (130) III analog sind, führen auf die einfachste Weise zum Konvergenzbeweis der sukzessiven Näherungen. Damit ist der Existenzbeweis der gesuchten Gleichgewichtskonfiguration erbracht [138].

Längs C_0 ist die Schwerkraft gleich Null. Beim langsamen Zusammenziehen der Flüssigkeitsmasse infolge fortschreitender Abkühlung und einer damit verbundenen Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit wird die Flüssigkeit allmählich über C_0 weg in den Außenraum gelangen. Da dies auf der ganzen Peripherie von C_0 gleichmäßig erfolgt, so erscheint das vorstehende sogenannte Rochesche Modell nicht als geeignet, die Entstehung der Planeten oder Satelliten im Sinne der Laplaceschen Hypothese dem Verständnis näher zu bringen [139].

Ersetzt man das kugelsymmetrische Attraktionszentrum durch einen geeigneten starren Kern mit achsensymmetrischer Dichteverteilung, etwa

---

[136] Man vergleiche **9.** S. 59, sowie die entsprechenden Ausführungen loc. cit. [75] S. 516ff. und S. 556ff.

[137] Wir bezeichnen mit $\overset{2}{\Pi}\{\zeta\}$ den Ausdruck, der entsteht, wenn man in (151) rechterhand $\overset{n-1}{\zeta}$ durch ζ, somit zugleich $\overset{n-1}{T}$ durch T_1 ersetzt.

[138] Man vergleiche zu dem Vorstehenden die Ausführungen der in der Fußnote [133] genannten Abhandlung von K. Maruhn. Herr Maruhn beweist in dem ersten Teile seiner Arbeit die Existenz der im Haupttext behandelten Konfiguration unter Zugrundelegung meines auf S. 161 erwähnten Verfahrens. In dem zweiten Teile werden zu gleichem Zwecke die Methoden meiner loc. cit. [75] genannten Arbeit verwendet. Beim Übergang zu der gesuchten Konfiguration wird dabei M festgehalten und $\omega_1 \neq \omega$ in geeigneter Weise bestimmt.

[139] Vgl. ten Bruggencate, Die Entwicklung der Sterne, Forschungen und Fortschritte **9** (1933), S. 158—160.

durch einen kleinen starren, von einem verlängerten Rotationsellipsoid begrenzten Körper, dessen große Achse die Richtung der x-Achse hat, so gelangt man zu einem Modell mit nur zwei auf der x-Achse gelegenen Punkten des Randes, in denen die Schwerkraft verschwindet, somit eine Massenentweichung zu erwarten ist. Statt einer dreidimensional oder linienartig verteilten Masse kann man natürlich auch von zwei gleichen, starr verbundenen, auf der x-Achse in gleichem Abstand von dem Ursprung angebrachten Massenpunkten ausgehen. Sind die beiden Massen verschieden, so gewinnt man ein Modell mit nur einem singulären Punkte, darum nur einer Entweichungsstelle.

Das in **28.** und **29.** entwickelte Verfahren gestattet, sinngemäß umgestaltet, den Existenzbeweis mancher anderer Gleichgewichtskonfiguration zu führen. So dürfte es jetzt möglich sein, um nur ein Beispiel zu nennen, den Beweis der Existenz schwach inhomogener Rochescher Satelliten in der Umgebung der homogenen zu erbringen.

30. Schlußbemerkungen. Wir hatten im Laufe unserer Darstellung wiederholt Gelegenheit, weitere Fragen zu berühren. Es sei zum Schluß gestattet, in aller Kürze auf einige neue Ergebnisse und einige Probleme hinzuweisen, die mit Rücksicht auf den zur Verfügung stehenden Raum nicht näher behandelt werden konnten.

Man kann vor allem, um an die Ausführungen der letzten Nummer anzuknüpfen, das starre punkt- oder linienartige Attraktionszentrum durch einen geeigneten homogenen Flüssigkeitskörper ersetzen. Wie Maruhn neuerdings zeigte, gelangt man durch einen Ausbau der in **17.** und **29.** angegebenen Schlußweisen zu einem Existenzbeweis einer Gleichgewichtsfigur, bestehend aus einem regulären Maclaurinschen oder Jacobischen Flüssigkeitsellipsoide und einer dünnen, sich bis zu einer schwerelosen Linie oder den schwerelosen Punkten erstreckenden Atmosphäre, deren Dichte wie in **29.** am Rande verschwindet. (Man vergleiche die in der Fußnote [130] erwähnte, demnächst erscheinende Abhandlung von Herrn Maruhn.) Im Anschluß daran wäre es von Interesse festzustellen, wie die Verhältnisse im Falle der Maclaurinschen oder Jacobischen Verzweigungsellipsoide als Ausgangsfiguren liegen. Des weiteren, ob man der Betrachtung etwa Liapounoff-Poincarésche Figuren in der Nachbarschaft der Ellipsoide zugrunde legen kann.

Es ist bis jetzt angenommen worden, daß die Dichte der Atmosphäre auf der Oberfläche des Zentralkörpers einen Sprung erleidet. Es dürfte möglich sein, den Sprung durch einen hinreichend scharfen, aber stetigen Abstieg der Dichte zu ersetzen. Allgemeiner dürfte sich in der Umgebung einer beliebigen homogenen oder heterogenen „regulären" Gleichgewichtsfigur mit dem Randwert der Dichte $f > 0$ die Existenz weiterer Gleichgewichtsfiguren mit einer am Rande hinreichend scharf, aber stetig gegen Null abfallenden Dichte dartun lassen.

Die Entwicklungen dieses Buches sind fast ausschließlich mathematischen Charakters. Nur gelegentlich wurde auf mögliche astronomische Anwendungen hingewiesen. Und doch ist die Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten der Beschäftigung mit astrophysikalischen und kosmogonischen Fragen entsprungen. Vielleicht könnten darum die Resultate und Methoden dieses Buches, vor allem die Ergebnisse der Nummern **26.** bis **29.** bei weiterem Ausbau in der Theorie der Planetenatmosphären, der Bildung der Satelliten, möglicherweise auch in der Theorie der Doppelsterne u. dgl. einmal auch eine mehr praktische Bedeutung für die Astronomie erlangen[140]. Im Zusammenhang damit wäre, worauf ich schon einmal früher (vgl. loc. cit. [128]) hingewiesen habe, die Einführung weiterer physikalischer Parameter und eine ins einzelne gehende Verfolgung der in **29.** betrachteten Konfiguration bei ihrem Fortschreiten längs einer linearen Reihe von (quasistationären) Zuständen erwünscht.

---

[140] Den Anlaß zu diesen Ausführungen gaben mir Diskussionsbemerkungen von Herrn Kollegen Hopmann nach einem von mir in dem hiesigen mathematischen Kolloquium gehaltenen Vortrage.

Namen- und Sachverzeichnis.

Die Zahlen geben die Seiten an.